Slezská univerzita v Opavě
Filozoficko-přírodovědecká fakulta
Ústav fyziky

CVIČENÍ Z MATEMATIKY I

Sbírka příkladů

Andrea Kotrlová

Opava 2010

Obsah

Kapitola 1

Příklady
k opakování středoškolské látky

1.1 Úprava algebraických výrazů, mocniny, odmocniny, rozklad mnohočlenů

1.1.1. Upravte algebraické výrazy:

a) $$\frac{\dfrac{1-x}{1-x+x^2}+\dfrac{1+x}{1+x+x^2}}{\dfrac{1+x}{1+x+x^2}-\dfrac{1-x}{1-x+x^2}} \qquad \left[\frac{1}{x^3}\right]$$

b) $$\frac{\sqrt[6]{x^5}\,\sqrt[4]{x^3}\,x^{\frac{1}{3}}\,x^{-1}}{x^{-\frac{1}{2}}\,\sqrt[12]{x^5}} \qquad [x\ (x>0)]$$

c) $$\frac{(a-b)^2+ab}{(a+b)^2-ab} : \frac{a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2}{(a^3+b^3+a^2b+ab^2)(a^3-b^3)} \qquad [a-b]$$

1.1.2. Upravte a udejte podmínky existence výrazů:

a) $$\left(\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}\right)^{-1} : \left(\frac{a-b}{a^2+b^2-ab}\right)^{-1} \qquad [1;\ a\neq b,\ a\neq -b]$$

b) $$\frac{a^{-2}-4a^{-4}}{4a^{-6}-a^{-4}} : (-a)^{\frac{4}{2}} \qquad [-1;\ a\neq 0,\ a\neq \pm 2]$$

c) $$\frac{a\,\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^4\sqrt[3]{a^2}}} : \frac{a^{\frac{1}{2}}\,a^{-1}}{\sqrt[3]{a}} \qquad [a\ \sqrt[5]{a^2};\ a>0]$$

d) $$\frac{\left(\dfrac{x^2+y^2}{xy}-1\right)\left(\dfrac{x^2+y^2}{xy}+1\right)}{\dfrac{1}{(x+y)(x-y)}\left[\left(\dfrac{x^2}{y}\right)^2-\left(\dfrac{y^2}{x}\right)^2\right]} \qquad [1;\ x\neq 0,\ y\neq 0,\ x\neq \pm y]$$

e) $$\left(\frac{a^3-ab^2+b^3}{(a-b)^3}\right)\left(\frac{a^2-2ab+2b^2}{a^2-ab+b^2}-\frac{b}{a}\right) \qquad [1;\ a\neq 0;\ a\neq b]$$

1.1.3. Rozložte na součiny, resp. upravte krácením:

a) $$\frac{x^2-7x+10}{2x^2-13x+15} \qquad \left[\frac{x-2}{2x-3}\ \left(x\neq 5;\ x\neq \tfrac{3}{2}\right)\right]$$

b) $\dfrac{3x^2 - 11x + 6}{3x^2 - 17x + 10}$ $\left[\dfrac{x-3}{x-5} \ \left(x \neq \frac{2}{3};\ x \neq 5\right)\right]$

c) $\dfrac{2x^3 - 5x^2 - 2x + 5}{x^2 - 4x + 3}$ $\left[\dfrac{(2x-5)(x+1)}{x-3} \ (x \neq 3;\ x \neq 1)\right]$

1.2 Rovnice a nerovnice. Absolutní hodnota reálného čísla. Soustavy rovnic

1.2.1. Řešte v $\mathbb{R}$:

a) $\dfrac{x-a}{a} = \dfrac{a}{x-a}$ $[0;\ 2a]$

b) $\dfrac{y+4}{y-2} + \dfrac{7y-8}{8-2y-y^2} = \dfrac{y-2}{y+4}$ [nemá řešení]

c) $\dfrac{x^2-2x-8}{4-x} = 1$ $[-3]$

1.2.2. Řešte v $\mathbb{R}$:

a) $|2-3y| = 2y-3$ [nemá řešení]

b) $|x+1| = 3$ $[\{2, -4\}]$

1.2.3. Zjistěte, která x vyhovují nerovnici v oboru reálných čísel

a) $|3x+9| > 4x+3$ $[x < 6]$

b) $\dfrac{2x-3}{x+3} < 3$ $[x \in (-\infty; -12) \cup (-3; +\infty)]$

c) $\dfrac{x-2}{x+4} \geq 0$ $[(-\infty; -4) \cup \langle 2; +\infty)]$

d) $|x+2| - 3 \geq x$ $\left[x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right\rangle\right]$

1.2.4. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnice

a) $\dfrac{x+2}{1-x} \leq -2$ $[x \in (1, 4\rangle]$

b) $\dfrac{2x-1}{x-2} \geq 1$ $[x \in (-\infty, -1\rangle \cup (2, \infty)]$

c) $\dfrac{x-2}{2x-5} \leq 0$ $\left[x \in \left\langle 2; \frac{5}{2}\right)\right]$

d) $\dfrac{x-5}{x+3} > 3$ $[x \in (-7; -3)]$

1.2.5. V $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ řešte soustavu rovnic

$$x - y + 3 = 0$$
$$\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$$

$[[x; y] = [6; 9]]$

1.2.6. Sestrojte kartézské grafy soustavy nerovnic:

$$2x + 3y \leq 6$$
$$4x + 6y \geq 7$$

1.2.7. Která reálná x vyhovují rovnici

a) $3x + 5 = \sqrt{9x^2 + 5\sqrt{36x^2 + 62x + 5}}$ [10]

b) $3 + \sqrt{x-1} = x$ [5]

c) $3 - \sqrt{x-1} = x$ [2]

d) $21 + \sqrt{x^2 - 9} = x$ [nemá řešení]

e) $\sqrt{(x+1)(x-5)} - \sqrt{7-3x} = 0$ [−3]

1.2.8. V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici: $\dfrac{2x-1}{x+1} > 1$ [$x < -1;\ x > 2$]

1.2.9. V množině celých čísel určete obor pravdivosti výrokové formy

a) $|2x+3| = x + 5$ [$\{2\}$]

b) $|2x+3| \leq x + 5$ [$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$]

1.3 Logaritmy. Logaritmické a exponenciální rovnice

1.3.1. Řešte rovnice

a) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\dfrac{27}{8}\right)^{x-1} = \dfrac{\log 4}{\log 8}$ [2]

b) $3^3 \cdot 27^{2x-3} = 81^{3x-5}$ $\left[\dfrac{7}{3}\right]$

c) $3 \cdot 4^x + \dfrac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \dfrac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$ $\left[-\dfrac{1}{2}\right]$

1.3.2. Určete všechna řešení rovnic v oboru reálných čísel:

a) $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10$ $\left[100;\ \dfrac{1}{100}\right]$

b) $(\log_3 x)^2 - \log_3 x^3 + 2 = 0$ [9; 3]

c) $\log(x-1) + \log(x+1) = 3\log 2 + \log(x-2)$ [5; 3]

d) $\log(x+2) - \log(x-1) = 2 - \log 4$ $\left[\dfrac{9}{8}\right]$

e) $\log_3(x-1) - 2\log_3(x-3) = 0$ [5]

1.4 Goniometrie. Goniometrické rovnice

1.4.1. Zjednodušte výrazy a určete, kdy jsou reálné:

a) $\dfrac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}$ $\left[\operatorname{tg}^2 x;\ x \neq k\dfrac{\pi}{2},\ k \in Z\}\right]$

b) $\dfrac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$ $\left[1 - \sin x;\ x \neq \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z\}\right]$

c) $\dfrac{\sin 2x}{\sin x} - \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$ $\left[\dfrac{1}{\cos x};\ x \neq k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right]$

d) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}$ $\left[1;\ x \neq k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right]$

1.4.2. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice

a) $\sin 2x = \operatorname{tg} x$ $\left[x = k\pi;\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right]$

b) $\sin^2 x + \frac{3}{2}\cos^2 x = \frac{5}{2}\sin x \cos x$ $\left[x \doteq 56^\circ + k\pi;\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right]$

c) $(\operatorname{tg} x)^{-1} - 2(\sin x)^{-1} = -\operatorname{tg} x$ $\left[x \neq k\pi;\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right]$

d) $\operatorname{tg} x = 3\operatorname{cotg} x$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right]$

e) $\sin 2x = \sin x$ $\left[x = k\pi;\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right]$

1.4.3. Lanovka má přímou trať délky 435 m a stoupá pod úhlem o velikosti 40°. Jaký je výškový rozdíl mezi horní a dolní stanicí? [279, 6 m]

1.4.4. Na vodorovné rovině stojí 65 m vysoká věž a továrenský komín. Z vrcholu věže vidíme patu komína v hloubkovém úhlu $\alpha = 10^\circ 19'$ a od paty věže vidíme vrchol komína ve výškovém úhlu $\beta = 17^\circ 43'$. Jak vysoký je komín? [114 m]

1.4.5. Určete velikost všech úhlů a stran trojúhelníka, pro nějž platí:

$\alpha = 30^\circ,\ b = 10,\ a = 5$ $\left[\beta = 90^\circ,\ \gamma = 60^\circ,\ c = 5\sqrt{3}\right]$

1.4.6. Z bodu ležícího ve výšce h nad horizontální rovinou jdoucí patou věže vidíme vrchol věže ve výškovém úhlu α, patu věže v hloubkovém úhlu β. Jak vysoká je věž?

$[h(1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{cotg}\beta)]$

1.4.7. Těsně u břehu řeky stojí budova, z jejíchž oken nad sebou vzdálených h metrů je vidět bod na protějším břehu v hloubkových úhlech α, β ($\alpha > \beta$). Jak široká je řeka?

$\left[\frac{h\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)}\right]$

1.4.8. Po přímé cestě se přesouvá vojenská kolona. Pozorovatel na stanovišti A, které leží mimo cestu, zjistil radiolokátorem, že vzdálenost místa A od čela kolony U je 14 350 m, vzdálenost A od konce kolony V je 13 840 m a velikost úhlu UAV je $13^\circ 32'$. Vypočítejte délku kolony. [3 360 m]

1.4.9. Hlídce byl určen pochodový úhel o velikosti 13°, po 7 km byl změněn směr pochodu na úhel o velikosti 75°. Tímto směrem prošla hlídka dalších 8 km. Jaká je vzdálenost hlídky vzdušnou čarou od výchozího bodu? [12, 9 km]

Kapitola 2

Množiny

2.1 Operace s množinami

2.1.1. Výčtem prvků zapište množiny:

a) $\{x \in \mathbb{Z} : |x+3| < \sqrt{3}\}$,
b) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0\}$,
c) $\{x \in L : (x \text{ je studentem 1. ročníku oboru PTA}) \wedge (x \text{ je dívka})\}$, kde L značí množinu všech lidí.

Řešení:

a) Řešením nerovnice $|x+3| < \sqrt{3}$ jsou všechna reálná čísla x z intervalu $\left(-3-\sqrt{3}; -3+\sqrt{3}\right)$; v tomto intervalu leží celá čísla $-4, -3, -2$, tj. $\{x \in \mathbb{Z} : |x+3| < \sqrt{3}\} = \{-4; -3; -2\}$.
b) Zřejmě $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0\} = \{0\}$.
c) Ve složené závorce je potřeba vyjmenovat všechny dívky studující v 1. ročníku obor PTA.

2.1.2. Nechť $A = (0; 5)$ (otevřený interval), $B = \{3; 4; 5; 6\}$. Zapište množiny:

a) $A \cap B$, [$\{3; 4\}$]
b) $A \cup B$, [$(0; 5\rangle \cup \{6\}$]
c) $A - B$, [$(0; 3) \cup (3; 4) \cup (4; 5)$]
d) $B - A$, [$\{5; 6\}$]
e) $\overline{A_{\mathbb{R}}}$, [$(-\infty; 0\rangle \cup \langle 5; +\infty)$]
f) $\overline{B_{\mathbb{R}}}$. [$(-\infty; 3) \cup (3; 4) \cup (4; 5) \cup (5; 6) \cup (6; +\infty)$]

2.1.3. Jsou dány množiny $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| < 1 \wedge x \geq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| \geq 3\}$.
Zapište pomocí intervalů:

a) A, [$\langle 2; 3)$]
b) B, [$(-\infty; -5\rangle \cup \langle 1; +\infty)$]
c) $A \cup B$, [$(-\infty; -5\rangle \cup \langle 1; +\infty)$]
d) $A \cap B$. [$\langle 2; 3)$]

2.1.4. Nechť $A = \{1; 2; 4; 7; 11; 16\}$, $B = \{1; 3; 7; 13\}$, $C = \{1; 6; 11; 19\}$. Určete

a) $A \cup B$, [$\{1; 2; 3; 4; 7; 11; 13; 16\}$]

b) $B \cup C$, [$\{1; 3; 6; 7; 11; 13; 19\}$]

c) $A \cup B \cup C$, [$1; 2; 3; 4; 6; 7; 11; 13; 16; 19$]

d) $A \cap B$, [$\{1; 7\}$]

e) $A \cap C$, [$\{1; 11\}$]

f) $A \cap B \cap C$. [$\{1\}$]

2.1.5. Nechť $A = \{a; c\}$, $B = \{b; d; c\}$. Utvořte kartézské součiny

a) $A \times B$, [$\{(a; b), (a; d), (a; c), (c; b), (c; d), (c; c)\}$]

b) $B \times A$. [$\{(b; a), (b; c), (d; a), (d; c), (c; a), (c; c)\}$]

2.1.6. Jsou dány množiny $A = \{1; 2; 3\}$ a $B = \{3; 5\}$. Výčtem prvků zapište kartézský součin množin $A \times B$. [$\{(1; 3), (2; 3), (3; 3), (1; 5), (2; 5), (3; 5)\}$]

2.1.7. Jakou množinu v prostoru opatřeném kartézskou souřadnou soustavou vyplní všechny body, jejichž souřadnice (tj. uspořádané trojice reálných čísel) jsou z kartézského součinu intervalů $\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \times \langle e, f\rangle$?

2.1.8. Jsou dány množiny $A = \{-4; 0; 4\}$ a $B = \langle -4; 4)$. Určete

a) $A \cup B$, [$\langle -4; 4\rangle$]

b) $A \cap B$, [$\{0; -4\}$]

c) $A - B$, [$\{4\}$]

d) $B - A$, [$(-4, 0) \cup (0, 4)$]

e) načrtněte $A \times B$.

2.1.9. Jsou dány množiny $A = \{-2; -1; 0; 3\}$ a $B = \langle -3; 5)$. Určete

a) $A \cup B$, [$\langle -3; 5)$]

b) $A \cap B$, [$\{-2; -1; 0; 3\}$]

c) $A - B$, [$\emptyset$]

d) $B - A$, [$\langle -3; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 5)$]

e) $\overline{A_B}$, [$B - A$]

f) $\overline{A_{\mathbb{R}}}$, [$(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$]

g) $\overline{B_A}$, [$\emptyset$]

h) $\overline{B_{\mathbb{R}}}$, [$(-\infty; -3) \cup \langle 5; +\infty)$]

i) načrtněte $A \times B$ a $B \times A$.

2.1.10. Užitím Vennových diagramů rozhodněte, zda pro libovolné podmnožiny A, B, C dané základní množiny platí:

a) $(A \cap \overline{B}) \cup B = A \cup B$, [platí]

b) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$, [neplatí]

c) $\overline{C} \cap (A \cap B) = (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{C} \cap B)$. [platí]

2.1.11. Dokažte, že pro libovolné dvě množiny A, B platí:

a) $A = (A - B) \cup (A \cap B)$,

b) $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$.

Řešení: Množinová rovnost $M = N$ se dokazuje buď tak, že ukážeme: $x \in M \Leftrightarrow x \in N$, nebo tak, že použijeme zřejmého tvrzení $(M = N) \Leftrightarrow (M \subset N \wedge N \subset M)$ a dokazujeme:

1. $x \in M \Rightarrow x \in N$ (tj. $M \subset N$),
2. $x \in N \Rightarrow x \in M$ (tj. $N \subset M$).

a) $(x \in A) \Leftrightarrow (x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in B)) \Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin B) \vee$
$\vee (x \in A \wedge x \in B)) \Leftrightarrow (x \in (A - B) \vee x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in (A - B) \cup (A \cap B))$.

b) $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow ((x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in B)) \vee$
$\vee (x \in B \wedge (x \notin A \vee x \in A))) \Leftrightarrow (((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \vee$
$\vee ((x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in B \wedge x \in A)) \Leftrightarrow (x \in (A - B) \vee x \in (A \cap B) \vee$
$\vee x \in (B - A) \vee x \in (B \cap A)) \Leftrightarrow (x \in (A - B) \vee x \in (A \cap B) \vee x \in (B - A)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A))$.

2.2 Binární relace, zobrazení

2.2.1. Graficky znázorněte binární relaci $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y - 4 \geq 0\}$.

Řešení: viz obr. 2.1(a).

2.2.2. Najděte pravidlo určující binární relaci na $\mathbb{R}$, která je dána šedě zvýrazněnou (otevřenou) podmnožinou roviny na obr. 2.1(b), (c), (d).

Řešení:

S elementárními znalostmi rovinné analytické geometrie snadno zjistíme:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$,
b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 < 1)\}$,
c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \cdot y < 1\}$.

2.2.3. Nechť zobrazení $f : \langle 0, +\infty) \to \langle 4, +\infty)$ je dáno předpisem $x \mapsto f(x) = x^2 + 4$. Najděte předpis definující inverzní zobrazení f^{-1}.

Řešení: Zobrazení f je zřejmě vzájemně jednoznačné (speciálně prosté), a tedy inverzní zobrazení k němu existuje. Přitom:

$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 4 = y.$

My ale potřebujeme hodnotu $f^{-1}(y)$ (tj. x) vyjádřit v závislosti na y, tedy z předpisu $y = x^2 + 4$, definujícího zobrazení f, potřebujeme spočítat x v závislosti na y.

$y = x^2 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{y - 4}$ (bereme $+\sqrt{y - 4}$, neboť víme, že $x \in \langle 0, +\infty)$).

Hledaný předpis tedy je: $f^{-1}(y) = \sqrt{y - 4}$.

2.2.4. Jaká podmnožina roviny opatřené kartézskou souřadnou soustavou (tj. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) definuje následující binární relace na $\mathbb{R}$?

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ [kružnice se středem v počátku a poloměrem 1]
b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y \neq 0\}$ [celá rovina bez souřadnicových os]

2.2.5. Je dána množina $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Znázorněte graficky binární relace

a) $R = \{(x, y) \in A \times A : x > y\}$,
b) $S = \{(x, y) \in A \times A : x^2 - y^2 < 1\}$,
c) $T = R \cap S$.

2.3 Uspořádané množiny

2.3.1. Najděte v $\mathbb{R}$ maximum, minimum, supremum a infimum (pokud existují) množin:

a) $(0;1)$, [$\nexists$, $\nexists$, 1, 0]

b) $\langle 0;1\rangle$, [1, 0, 1, 0]

c) množina všech záporných čísel, [$\nexists$, $\nexists$, 0, $\nexists$]

d) $(0;+\infty)$, [$\nexists$, $\nexists$, $\nexists$, 0]

e) $(2;4\rangle$, [4, $\nexists$, 4, 2]

f) $\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\dots\right\}$, [1, $\nexists$, 1, 0]

g) $\left\{8-\frac{2}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $n\in\mathbb{N}$. [$\nexists$, 6, 8, 6]

2.3.2. Najděte maximum, minimum, supremum, infimum množiny M, jejíž prvky tvoří čísla tvaru $\frac{n+2}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$. $\left[\max M=\sup M=\frac{3}{2},\ \min M=\nexists,\ \inf M=1\right]$

2.3.3. V $\mathbb{Z}_0$ určete horní a dolní závoru množiny $M=\{-1;0;1\}$.
[horní závora: $1,2,\dots$, dolní závora: $-1,-2,\dots$]

2.3.4. Je dán interval $I=\langle -1;3)$. Určete v $\mathbb{Z}$

a) horní závoru, $[3,4,5,\dots]$

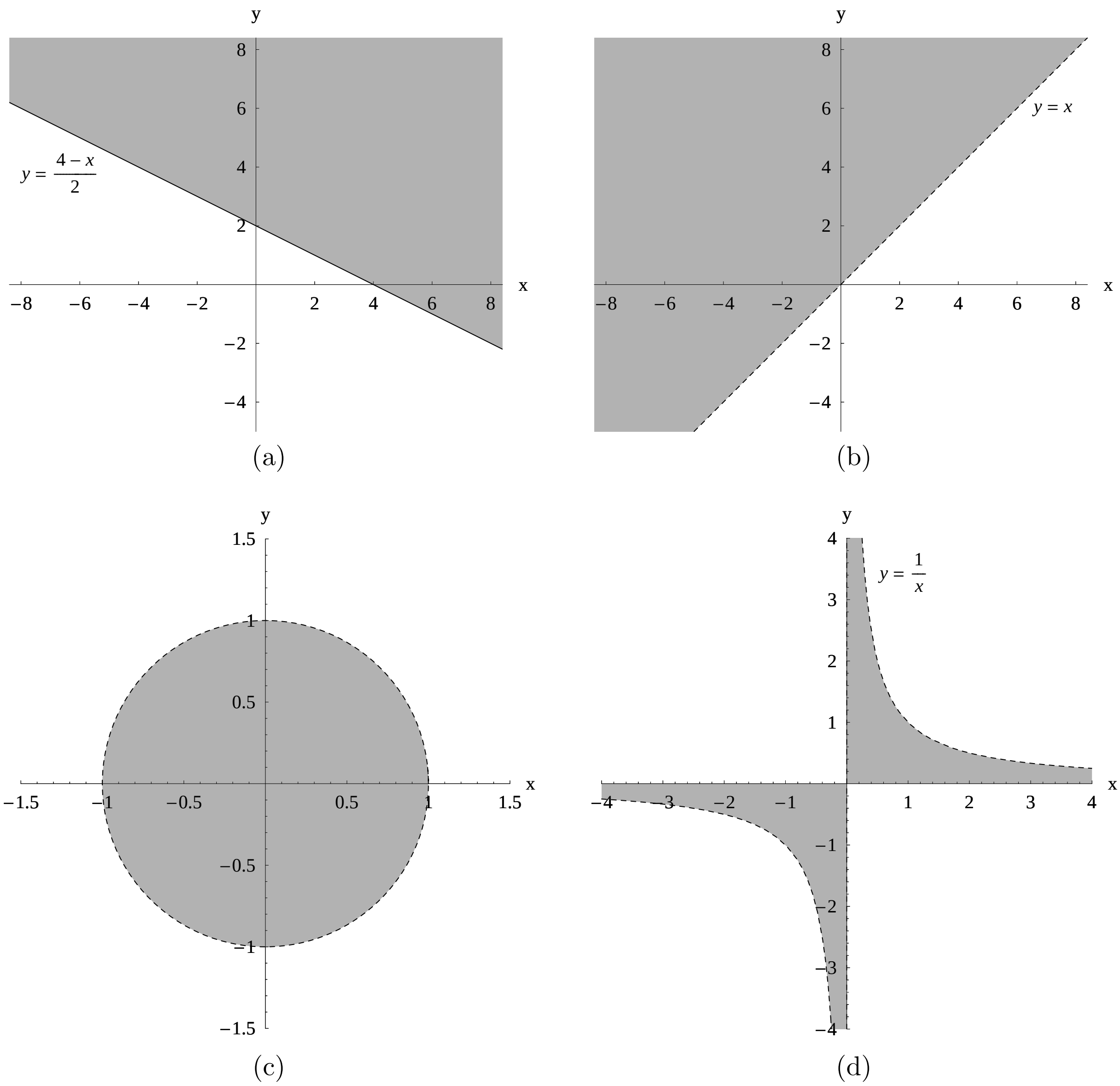
b) dolní závoru, $[-1,-2,-3,\dots]$

c) maximum, [$\nexists$]

d) minimum, $[-1]$

e) supremum, [3]

f) infimum. $[-1]$



Obr. 2.1: K příkladům 2.2.1 a 2.2.2.

Kapitola 3

Funkce

Funkce je každé zobrazení f množiny A do číselné množiny $B \subset \mathbb{R}$, tzn. funkce je předpis, který každému prvku $a \in A$ jednoznačně přiřadí číslo $b \in B$. Množině A říkáme *definiční obor* funkce a její prvek nazýváme nezávisle proměnnou nebo argumentem. Množině B říkáme *obor funkčních hodnot*, jejím prvkům závisle proměnné nebo hodnoty funkce. Jsou-li A, B množiny reálných čísel, mluvíme o funkci jedné reálné proměnné, zapisujeme obvykle

$$y = f(x); \qquad x \in A, \qquad y \in B\,.$$

Přehled základních vlastností funkcí je uveden v tabulce 3.1.

Graf funkce $y = f(x)$ je množina všech bodů v rovině o souřadnicích $[x; f(x)]$. Na obr. 3.2 – 3.5 jsou znázorněny grafy elementárních funkcí. Všimněte si, že graf *sudé* funkce je osově symetrický podle osy y, graf *liché* funkce je symetrický podle počátku soustavy souřadnic. Funkce rostoucí, neklesající, klesající a nerostoucí se nazývají *monotónní*, z nich pak funkce rostoucí a klesající jsou *ryze monotónní*. Je zřejmé, že ke každé ryze monotónní funkci existuje funkce *inverzní*, neboť každá ryze monotónní funkce je *prostá*. Dále platí, že žádná sudá funkce není prostá.

3.1 Definiční obor funkce

Hlavní zásady pro určování definičního oboru funkcí:

1. výraz ve jmenovateli musí být různý od nuly,
2. argument logaritmu musí být větší než nula,
3. výraz pod sudou odmocninou musí být nezáporný,
4. pro argument funkce tg x musí platit: $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, pro cotg x: $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
5. argument funkcí $\arcsin x,\ \arccos x$ musí ležet v intervalu $x \in \langle -1; 1\rangle$.

3.1.1. Určete definiční obor funkce $y = \dfrac{5x-1}{\sin x + \cos x}$.

Řešení: Funkce v čitateli i jmenovateli jsou definovány pro všechna x, tedy jejich podíl je definován pro všechna x taková, že jmenovatel je různý od nuly:

$$\sin x + \cos x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x \neq -\cos x \quad \Rightarrow \quad x \neq \frac{3}{4}\pi + k\pi = \pi\left(\frac{3}{4} + k\right)$$

funkce	požadavek na definiční obor	definiční vlastnost	příklady
sudá	$x \in D_f \;\Rightarrow\; -x \in D_f$	$f(-x) = f(x)$	x^2, $\cos x$
lichá	$x \in D_f \;\Rightarrow\; -x \in D_f$	$f(-x) = -f(x)$	x^3, $\sin x$
periodická	$p > 0,\ x \in D_f \;\Rightarrow\; x + p \in D_f$	$f(x+p) = f(x)$	$\sin x$, $\cos x$
rostoucí na I	$I \subset D_f$ je interval	$x_1 < x_2 \;\Rightarrow$ $f(x_1) < f(x_2)$	x^2 na $(0; +\infty)$, 2^x, $\log_2 x$
neklesající na I	$I \subset D_f$ je interval	$x_1 < x_2 \;\Rightarrow$ $f(x_1) \leq f(x_2)$	$f(x) = \text{konst.}$
klesající na I	$I \subset D_f$ je interval	$x_1 < x_2 \;\Rightarrow$ $f(x_1) > f(x_2)$	x^2 na $(-\infty; 0)$, 2^{-x}, $-\log_2 x$
nerostoucí na I	$I \subset D_f$ je interval	$x_1 < x_2 \;\Rightarrow$ $f(x_1) \geq f(x_2)$	$f(x) = \text{konst.}$
ohraničená na I	$I \subset D_f$ je interval	existuje $A \in \mathbb{R}$ tak, že $\lvert f(x)\rvert < A$ na I	$\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{arctg} x$

Tabulka 3.1: Základní vlastnosti funkcí.

Definičním oborem zadané funkce jsou tedy všechna reálná čísla kromě $x = \dfrac{3}{4}\pi + k\pi$, neboli

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{4}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3.1.2. Určete definiční obor funkce $y = \dfrac{1}{\log(x-2)} + \sqrt{9-2x}$.

Řešení: Definiční obor součtu (rozdílu, součinu, podílu) funkcí, příp. složené funkce, je množina takových $x \in \mathbb{R}$, pro která jsou definovány všechny funkce, ze kterých se daná funkce skládá, je to tedy průnik definičních oborů jednotlivých funkcí.

V našem případě musí platit:

1. jmenovatel zlomku různý od nuly: $\log(x-2) \neq 0 \;\Rightarrow\; x - 2 \neq 1 \;\Rightarrow\; \underline{x \neq 3}$
2. argument logaritmu větší než nula: $x - 2 > 0 \;\Rightarrow\; \underline{x > 2}$
3. pod sudou odmocninou číslo nezáporné: $9 - 2x \geq 0 \;\Rightarrow\; \underline{x \leq 9/2}$

Průnikem všech tří definičních oborů je $(2; 3) \cup (3; 9/2\rangle$, definičním oborem dané funkce tedy je $D_f = (2; 3) \cup (3; 9/2\rangle$.

3.1.3. Určete definiční obor funkce $y = \sqrt{\dfrac{x+5}{(x+2)^2}}$.

Řešení:

1. Funkce pod sudou odmocninou musí být nezáporná:
$\dfrac{x+5}{(x+2)^2} \geq 0 \;\Rightarrow\; x+5 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq -5,$
2. jmenovatel se nesmí rovnat nule: $(x+2)^2 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq -2.$

Definiční obor celé (složené) funkce je průnik těchto výsledků: $D_f = \langle -5; -2) \cup (-2; +\infty)$.

3.1.4. Určete definiční obor funkcí:

a) $y = \dfrac{1}{x-3}$ $[\mathbb{R} - \{3\}]$

b) $y = \sqrt{x^2 - 9}$ $[(-\infty; -3\rangle \cup \langle 3; \infty)]$

c) $y = \dfrac{5x}{x^2 - 1}$ $[\mathbb{R} - \{-1; 1\}]$

d) $y = \dfrac{4+x}{\sqrt{1-x^2}}$ $[(-1; 1)]$

e) $y = 1 - |2x|$ $[\mathbb{R}]$

f) $y = \dfrac{5x-1}{x+2}$ $[\mathbb{R} - \{-2\}]$

g) $y = \dfrac{3}{x^2+1}$ $[\mathbb{R}]$

h) $y = \dfrac{12x^3 - x}{x^2 - 18x + 80}$ $[\mathbb{R} - \{8; 10\}]$

i) $y = \dfrac{1-x}{x^2 + 3x + 15}$ $[\mathbb{R}]$

j) $y = \sqrt{3 - \sqrt{x}}$ $[\langle 0; 9\rangle]$

k) $y = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-3}$ $[\langle 2; 3) \cup (3; \infty)]$

l) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$ $[\mathbb{R} - \langle 1; 2\rangle]$

3.1.5. Určete definiční obor funkcí:

a) $y = \dfrac{5x-4}{4-2^x}$ $[\mathbb{R} - \{2\}]$

b) $y = \dfrac{8x}{3^x - 2^x}$ $[\mathbb{R} - \{0\}]$

c) $y = 3 - 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ $[\mathbb{R}]$

d) $y = \log(2x+1)$ $[(-1/2; \infty)]$

e) $y = \log\left(3^x + 1\right)$ $[\mathbb{R}]$

f) $y = \log \dfrac{x^2+5}{x-5}$ $[(5; \infty)]$

g) $y = \log\left(x^2 - 4\right)$ $[(-\infty; -2) \cup (2; \infty)]$

h) $y = \dfrac{3}{\ln(x+2)}$ $[(-2; -1) \cup (-1; \infty)]$

i) $y = \log\sqrt{3 - 2x - x^2}$ $[(-3; 1)]$

j) $y = \sqrt{\ln\left(4x - x^2\right)}$ $\left[\langle 2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\rangle\right]$

k) $y = \dfrac{1}{x^3}\,|\ln|x||$ $[\mathbb{R} - \{0\}]$

l) $y = \dfrac{3}{4-x^2} + \ln\left(x^3 - x\right)$ $[(-1;0) \cup (1;2) \cup (2;\infty)]$

3.1.6. Určete definiční obor funkcí:

a) $y = 2\cos x - 2^x$ $[\mathbb{R}]$

b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}}$ $\left[\left(\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi; \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\right]$

c) $y = \operatorname{cotg} x$ $[x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}]$

d) $y = \operatorname{tg} 2x$ $\left[x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right]$

e) $y = \operatorname{tg} \dfrac{1}{x}$ $\left[x \neq 0; x \neq \dfrac{2}{(2k+1)\pi}, k \in \mathbb{Z}\right]$

f) $y = \log \sin x$ $[(2k\pi; \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}]$

g) $y = \ln\sin(x-3) + \sqrt{16 + x^2}$ $[(3 + 2k\pi; \pi + 3 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}]$

h) $y = \log \dfrac{1-x}{1+x} + 3\sin 5x + \dfrac{1}{x}$ $[(-1;1) - \{0\}]$

i) $y = \sin(3x-4) + \dfrac{2x+3}{x^2-1} + \ln(7x+1)$ $[(-1/7;\infty) - \{1\}]$

j) $y = |\operatorname{tg} x| \cdot \dfrac{\ln\left(x^2\right)}{x}$ $\left[\mathbb{R} - \{0; (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}\right]$

3.1.7. Určete definiční obor funkcí:

a) $y = 5 - 2\arcsin\dfrac{x+1}{2}$ $[\langle -3; 1\rangle]$

b) $y = \arcsin(4x+1) + \dfrac{2x+3}{x^2-4} + \ln(3x-3)$ $[\emptyset]$

3.1.8. Dokažte, že funkce $y = \log 2x$ je funkce rostoucí v celém svém definičním oboru.

Řešení: Aby funkce $f(x)$ byla rostoucí, musí platit: pro $x_1 < x_2$ je $f(x_1) < f(x_2)$.
Definiční obor naší funkce splňuje podmínku: $2x > 0 \;\Rightarrow\; \underline{x > 0}$.
Pro libovolná $0 < x_1 < x_2$ platí:

$$\begin{aligned} 2x_1 &< 2x_2 \\ \log 2x_1 &< \log 2x_2, \end{aligned}$$

protože $\log x$ je funkcí rostoucí. Tedy daná funkce $y = \log 2x$ je rostoucí.

3.2 Parita funkce

3.2.1. Určete, zda je funkce $y = \dfrac{4-x^2}{3x}$ sudá nebo lichá.

Řešení:

$$f(-x) = \frac{4-(-x)^2}{3(-x)} = \frac{4-x^2}{-3x} = -\frac{4-x^2}{3x} = -f(x).$$

Daná funkce je lichá.

3.2.2. Rozhodněte o sudosti, resp. lichosti, funkcí:

a) $y = x^3$ [lichá]

b) $y = 3$ [sudá]

c) $y = 2x^2$ [sudá]

d) $y = x^2 + 1$ [sudá]

e) $y = 2x^2 + 3$ [sudá]

f) $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ [ani sudá, ani lichá]

g) $y = (x-1)^3$ [ani sudá, ani lichá]

h) $y = (x+1)^2 - 2$ [ani sudá, ani lichá]

3.2.3. Mezi následujícími funkcemi najděte funkce sudé a liché

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ [ani sudá, ani lichá]

b) $y = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{x}$ [lichá]

c) $y = 3x^2 - \sqrt{1-x^2}$ [sudá]

d) $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$ [lichá]

e) $y = x\sin^2 x - x^3$ [lichá]

f) $y = 3\,|\cos x|$ [sudá]

3.3 Perioda funkce

3.3.1. Zjistěte, zda je funkce $y = \sin x + \cos x$ periodická, a v kladném případě najděte její základní periodu.

Řešení: Je-li funkce periodická, existuje číslo $p \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in D_f$ platí:

$$\sin x + \cos x = \sin(x+p) + \cos(x+p).$$

Užitím součtových vzorců dostaneme

$$\begin{aligned}\sin(x+p) + \cos(x+p) &= \sin x \cos p + \cos x \sin p + \cos x \cos p - \sin x \sin p \\ &= \cos p(\sin x + \cos x) + \sin p(\cos x - \sin x).\end{aligned}$$

Zřejmě musí platit: $\cos p = 1 \ \wedge\ \sin p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0 + 2k\pi,\ p_0 = 2\pi.$

Daná funkce je tedy periodická se základní periodou 2π.

3.3.2. Zjistěte, zda daná funkce je periodická, a případně najděte její základní periodu:

a) $y = 3\,|\cos x|$ $[\pi]$

b) $y = \sin \dfrac{x}{2}$ $[4\pi]$

c) $y = \sin 2x$ $[\pi]$

d) $y = \sin 3x$ $\left[\dfrac{2\pi}{3}\right]$

e) $y = \sin^2 x$ $[\pi]$

f) $y = \sin x^2$ [není periodická]

3.4 Inverzní funkce

3.4.1. Dokažte, zda funkce $y = \sqrt{3x-2}$ je prostá a najděte funkci k ní inverzní. Sestrojte grafy obou funkcí.

Řešení: Definiční obor: $3x - 2 \geq 0 \;\Rightarrow\; D_f = \left\langle \frac{2}{3}; +\infty \right)$.

Nechť $x_1,\ x_2\ (x_1 \neq x_2)$ jsou libovolná čísla z D_f, pak platí:

$$3x_1 - 2 \neq 3x_2 - 2$$
$$\sqrt{3x_1 - 2} \neq \sqrt{3x_2 - 2}.$$

Tedy funkce $y = \sqrt{3x-2}$ je prostá a existuje k ní funkce inverzní. Získáme ji tak, že provedeme formální záměnu proměnných $x \leftrightarrow y$:

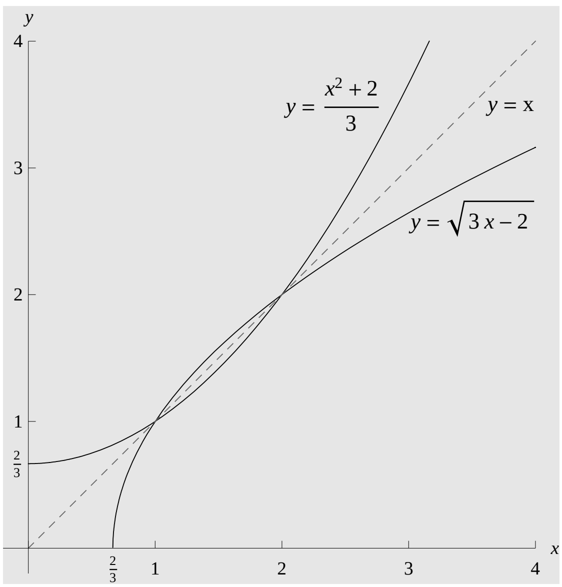
$$x = \sqrt{3y-2}$$
$$x^2 = 3y - 2$$
$$y = \frac{x^2+2}{3} = f^{-1}(x).$$

Definiční obor inverzní funkce je totožný s oborem funkčních hodnot funkce dané a obor hodnot inverzní funkce je totožný s definičním oborem původní funkce

$$D_{f^{-1}} = H_f,$$
$$H_{f^{-1}} = D_f.$$

V našem případě je tedy $D_{f^{-1}} = \langle 0; +\infty)$ (maximální definiční obor funkce $y = \dfrac{x^2+2}{3}$ je ovšem celé $\mathbb{R}$) a $H_{f^{-1}} = \left\langle \frac{2}{3}; +\infty \right)$.

Grafy dané funkce $f(x)$ a funkce k ní inverzní $f^{-1}(x)$ jsou vždy souměrné podle osy prvního a třetího kvadrantu $y = x$ (viz obr. 3.1).



Obr. 3.1: K příkladu 3.4.1.

3.4.2. Je dána funkce $y = 3x - 2,\ x \in \langle -1; 2\rangle$. Dokažte, že f^{-1} je funkce, určete $D_{f^{-1}}$ a sestrojte graf inverzní funkce f^{-1}. $\left[f^{-1} = \dfrac{x+2}{3},\ D_{f^{-1}} = \langle -5; 4\rangle\right]$

3.4.3. Určete, na kterých intervalech existuje inverzní funkce k následujícím funkcím, a najděte ji:

a) $y = 2x + 4$ $\left[f^{-1} = \dfrac{x-4}{2},\ \mathbb{R}\right]$

b) $y = x^2$ $\left[f^{-1} = \sqrt{x},\ \langle 0; \infty)\right]$

c) $y = x^3$ $\left[f^{-1} = \sqrt[3]{x},\ \mathbb{R}\right]$

d) $y = \sqrt{2x+1}$ $\left[f^{-1} = \dfrac{x^2-1}{2},\ \langle 0; +\infty)\right]$

e) $y = \ln x$ $\left[f^{-1} = \mathrm{e}^x,\ \mathbb{R}\right]$

f) $y = 3^x$ $\left[f^{-1} = \log_3 x,\ (0; \infty)\right]$

g) $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ $\left[f^{-1} = \log_{\frac{1}{4}} x,\ (0; \infty)\right]$

h) $y = \dfrac{3-x}{2}$ $\left[f^{-1} = 3 - 2x,\ \mathbb{R}\right]$

i) $y = 3 - 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ $\left[f^{-1} = 2\ln\dfrac{3-x}{2},\ (-\infty; 3)\right]$

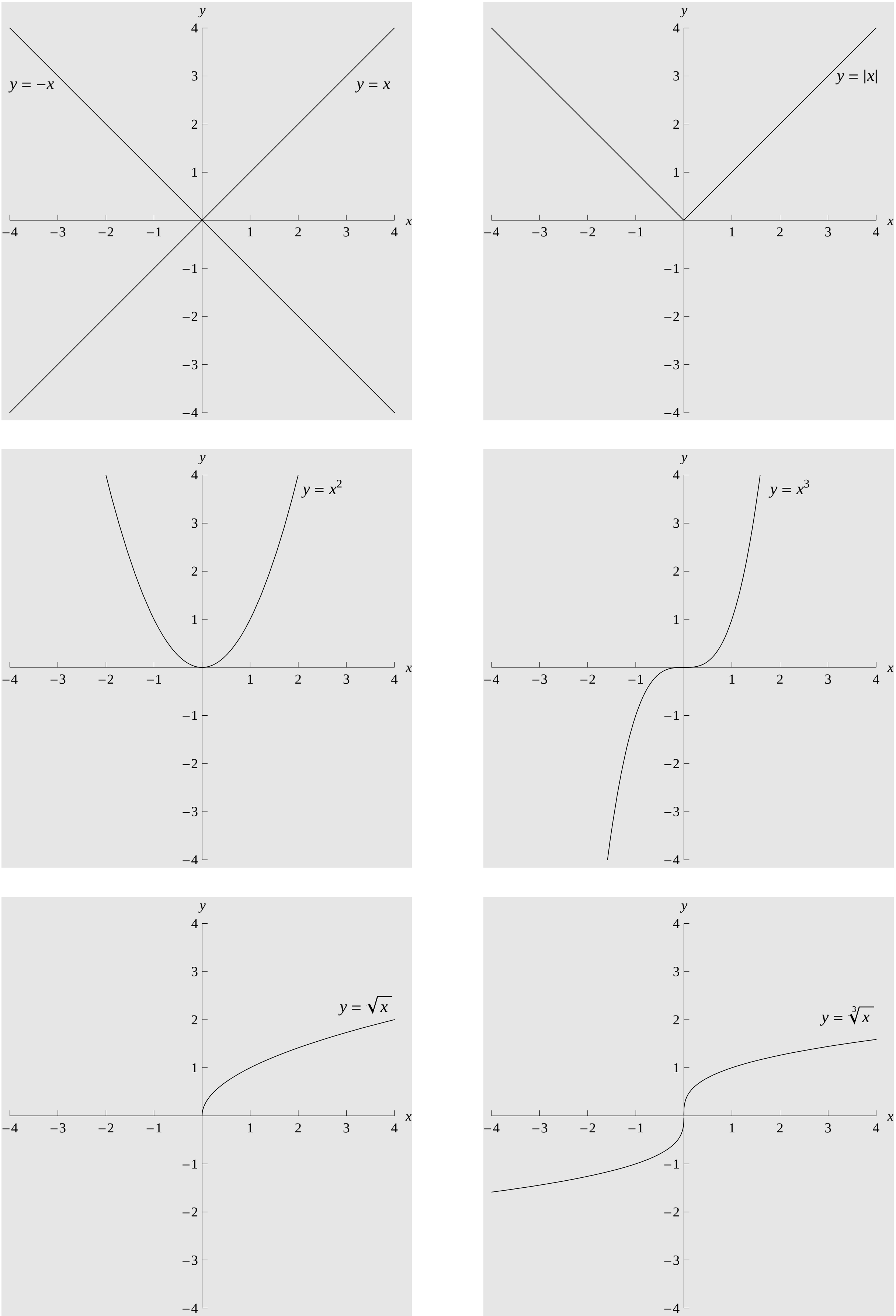
j) $y = 5 - 2\arcsin\dfrac{x+1}{2}$ $\left[f^{-1} = 2\sin\dfrac{5-x}{2} - 1,\ \langle 5-\pi; 5+\pi\rangle\right]$

3.5 Elementární funkce a jejich grafy

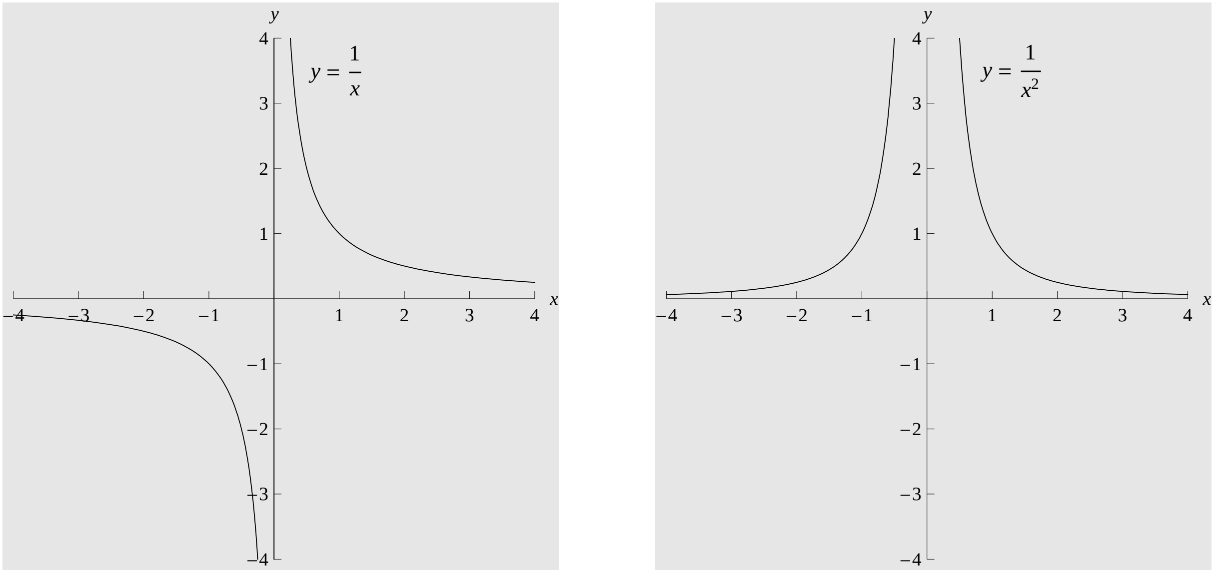
Elementární funkce můžeme rozdělit na

- polynomy,
- racionální lomené funkce,
- iracionální (inverzní k racionálním),
- exponenciální,
- logaritmické (inverzní k exponenciálním),
- goniometrické,
- cyklometrické funkce (inverzní ke goniometrickým).

Přehled vlastností vybraných funkcí je uveden v tabulce 3.2 a 3.3. Grafy elementárních funkcí jsou znázorněny na obr. 3.2 – 3.5.



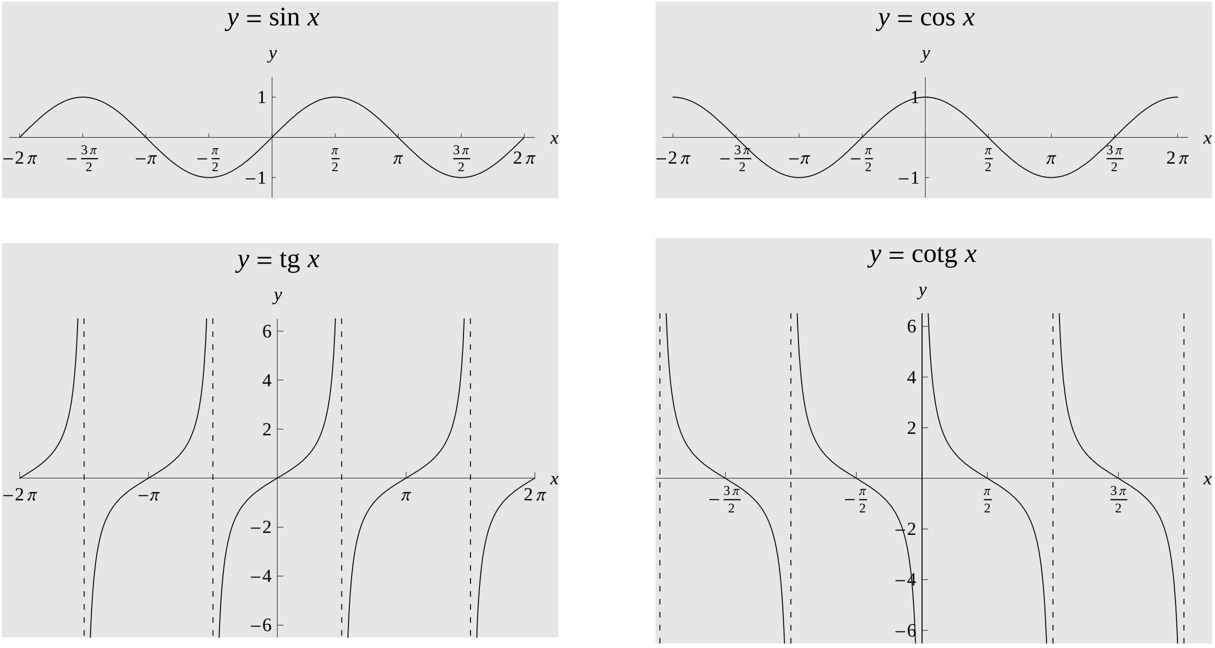
Obr. 3.2: Grafy elementárních funkcí



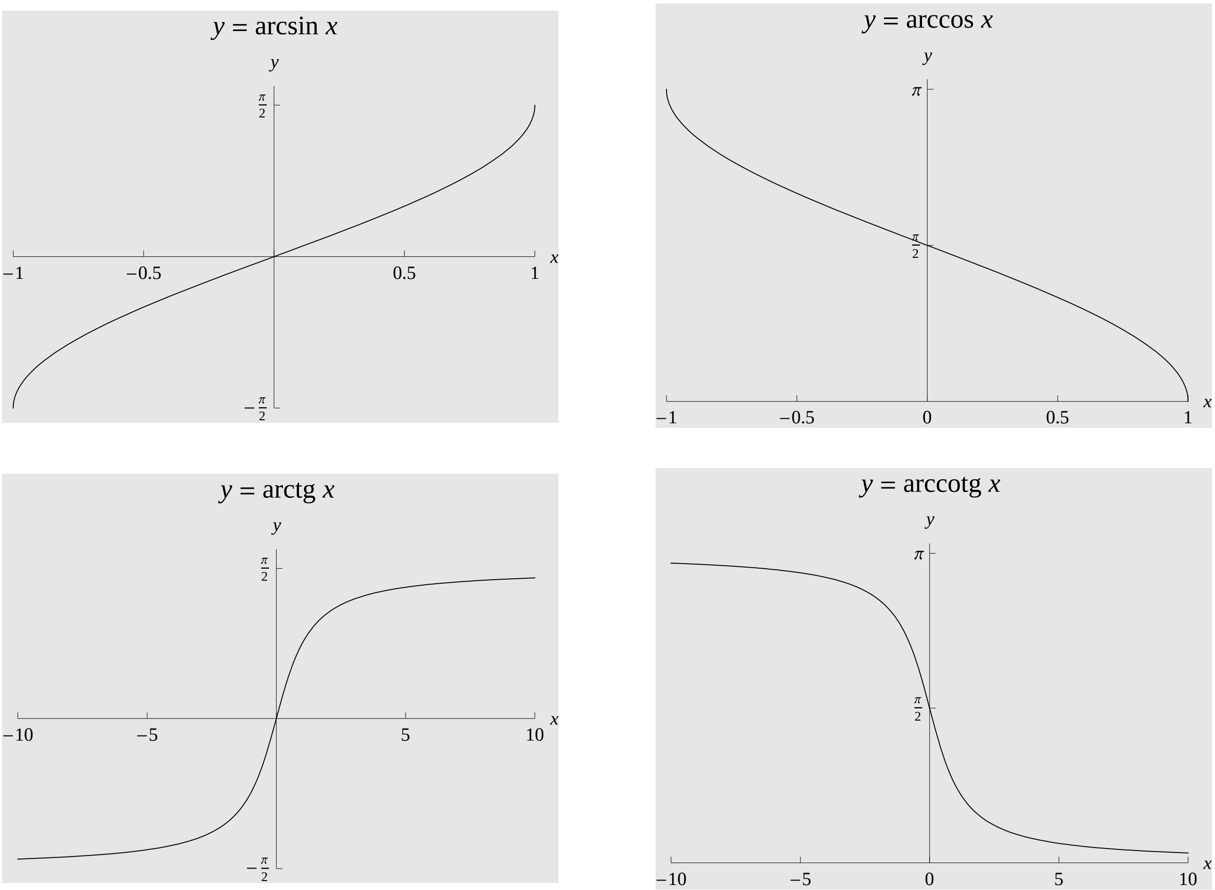
Obr. 3.3: Grafy elementárních funkcí

$f(x)$	D_f	H_f	vlastnosti	$f^{-1}(x)$	$D_{f^{-1}}$	$H_{f^{-1}}$	vlastnosti
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\langle -1; 1\rangle$	spojitá, roste	$\arcsin x$	$\langle -1; 1\rangle$	$\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$	spojitá, roste
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\langle -1; 1\rangle$	spojitá, klesá	$\arccos x$	$\langle -1; 1\rangle$	$\langle 0; \pi\rangle$	spojitá, klesá
$\mathrm{tg}\, x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$	$\mathbb{R}$	spojitá, roste	$\mathrm{arctg}\, x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	spojitá, roste
$\mathrm{cotg}\, x$	$x \neq k\pi$	$\mathbb{R}$	spojitá, klesá	$\mathrm{arccotg}\, x$	$\mathbb{R}$	$(0; \pi)$	spojitá, klesá

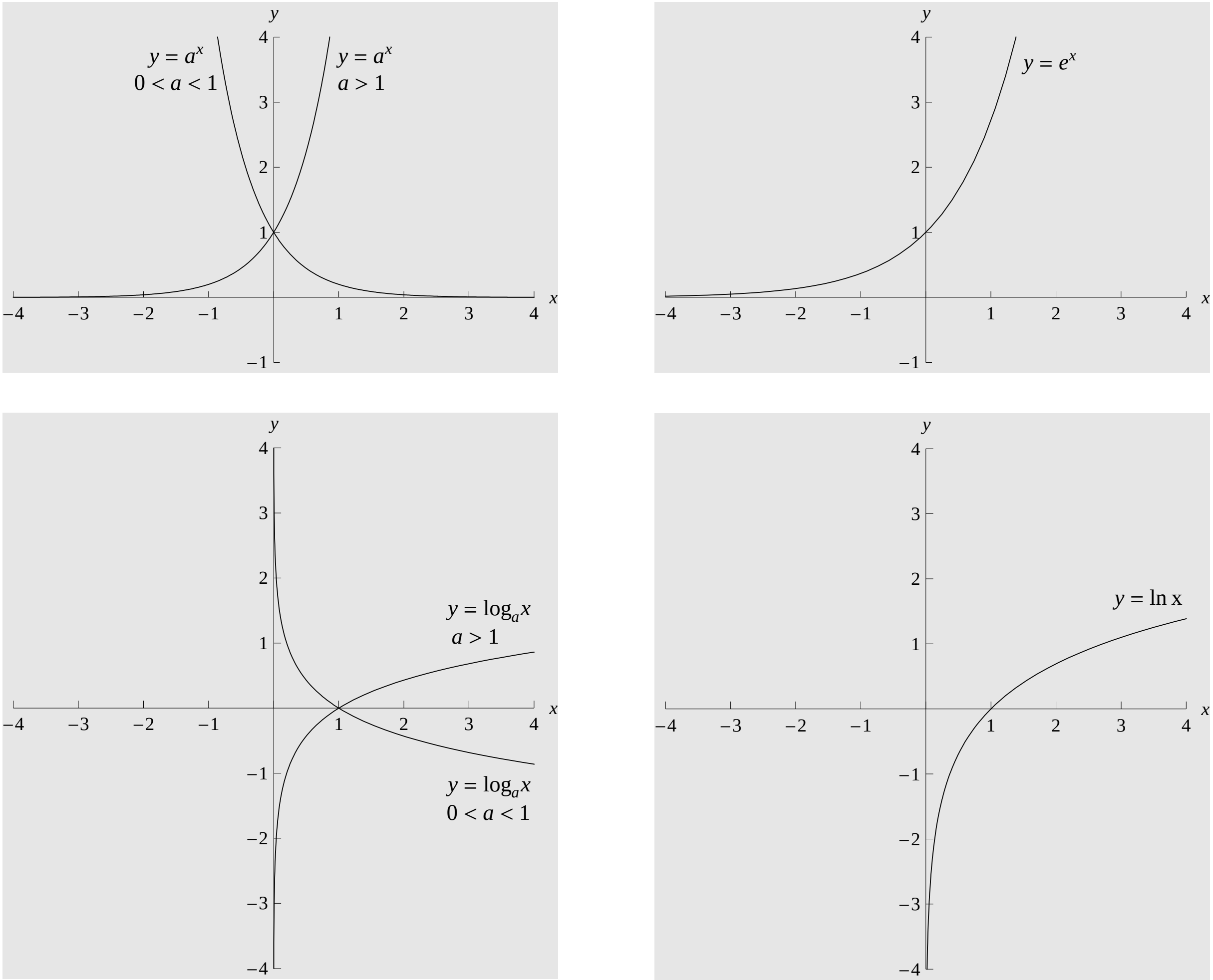
Tabulka 3.2: Goniometrické a cyklometrické funkce



Obr. 3.4: Goniometrické funkce



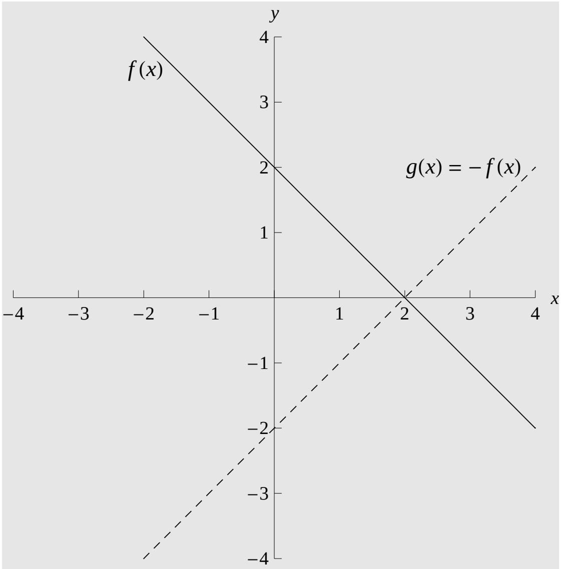
Obr. 3.5: Cyklometrické funkce

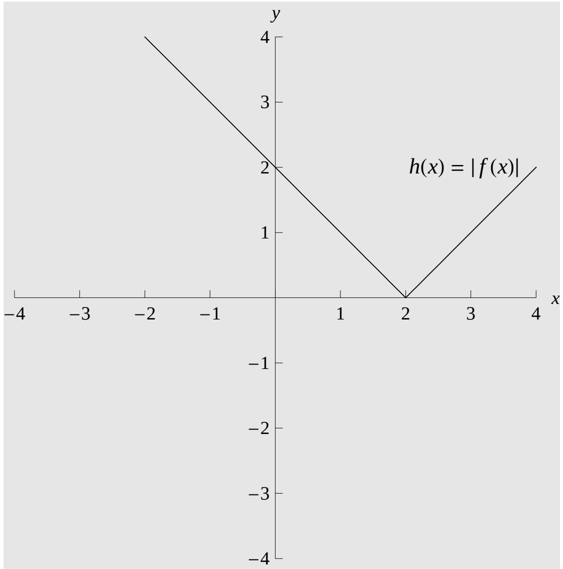


Obr. 3.6: Exponenciální a logaritmické funkce

$f(x)$	D_f	H_f	vlastnosti	$f^{-1}(x)$	$D_{f^{-1}}$	$H_{f^{-1}}$	vlastnosti
2^x	$\mathbb{R}$	$(0;+\infty)$	spojitá, roste	$\log_2 x$	$(0;+\infty)$	$\mathbb{R}$	spojitá, roste
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\mathbb{R}$	$(0;+\infty)$	spojitá, klesá	$\log_{\frac{1}{2}} x$	$(0;+\infty)$	$\mathbb{R}$	spojitá, klesá
a^x	$\mathbb{R}$	$(0;+\infty)$	spojitá roste $(a > 1)$ klesá $(a < 1)$	$\log_a x$	$(0;+\infty)$	$\mathbb{R}$	spojitá roste $(a > 1)$ klesá $(a < 1)$

Tabulka 3.3: Exponenciální a logaritmické funkce





Obr. 3.7: Řešení příkladu 3.5.3.

3.5.1. Sestrojte grafy funkcí:

a) $y = x$
b) $y = x^2$
c) $y = x^3$
d) $y = x^4$
e) $y = \dfrac{1}{x}$
f) $y = \dfrac{1}{x^2}$
g) $y = \dfrac{1}{x^3}$
h) $y = \dfrac{1}{x^4}$

3.5.2. Pomocí grafů známých elementárních funkcí sestrojte grafy funkcí:

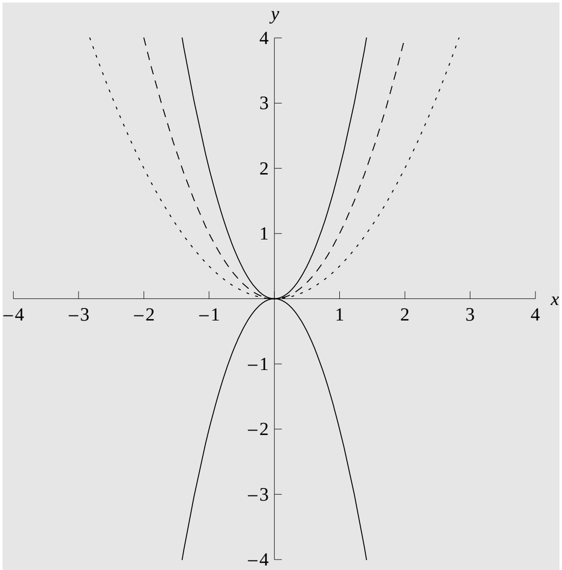
a) $y = 2x^2$
b) $y = 2x^2 - 5$
c) $y = |2x^2 - 5|$
d) $y = -2x^2$
e) $y = -2x^2 + 5$
f) $y = \dfrac{1}{2}x^2$
g) $y = 5x^2$
h) $y = (x-2)^2$
i) $y = (x-2)^2 + 3$

3.5.3. Sestrojte grafy funkcí:

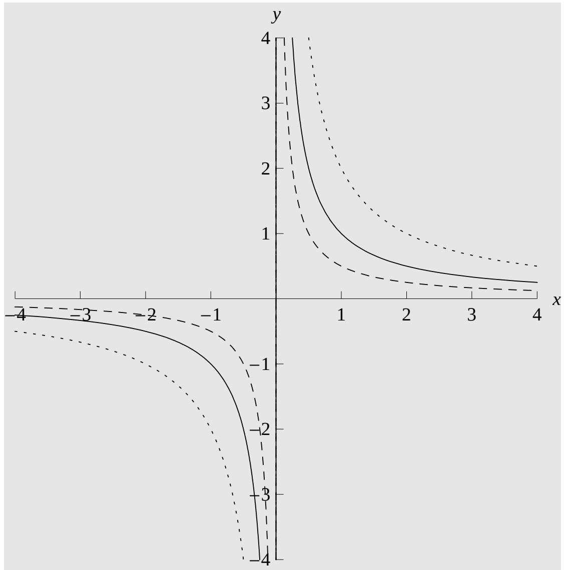
a) $f(x) = 2 - x$
b) $g(x) = -f(x)$
c) $h(x) = |f(x)|$

3.5.4. Sestrojte grafy funkcí:

a) $y = -\dfrac{1}{x}$
b) $y = \dfrac{2}{x}$
c) $y = -\dfrac{3}{x}$
d) $y = \dfrac{1}{x-2} + 3$



$y = \frac{1}{2}x^2,\ y = x^2,\ y = 2x^2,\ y = -2x^2$



$y = \frac{1}{2x},\ y = \frac{1}{x},\ y = \frac{2}{x}$

Obr. 3.8: K příkladům 3.5.2. a 3.5.4.

3.5.5. Sestrojte grafy následujících funkcí:

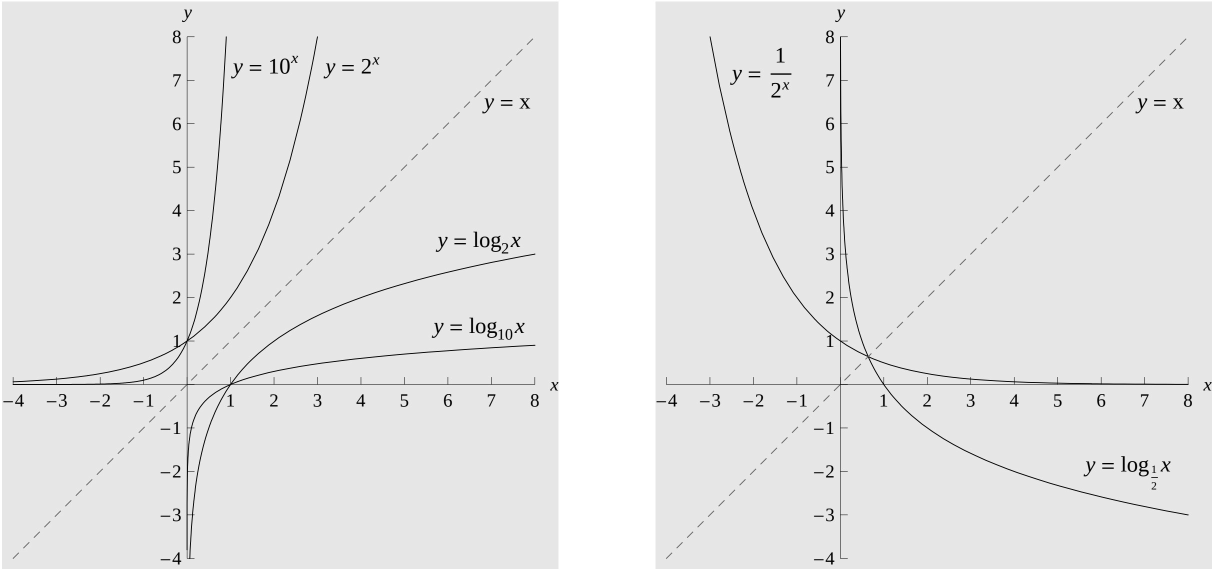
a) $y = 1^x$
b) $y = 2^x$
c) $y = 2^{x-2}$
d) $y = 3^x$
e) $y = 3^{x+1}$
f) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
g) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
h) $y = \log_2 x$
i) $y = \log_3 x$
j) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$
k) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

3.5.6. Sestrojte grafy funkcí:

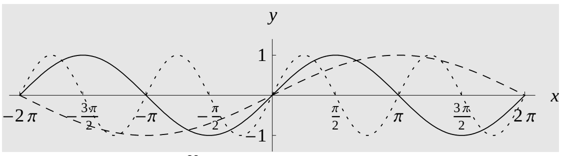
a) $y = 2\sin x$
b) $y = |3\cos x|$
c) $y = \sin 2x$
d) $y = \sin \frac{x}{2}$
e) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
f) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
g) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$

3.5.7. U následujících funkcí určete jejich definiční obor, obor hodnot, periodu, monotónnost. Dále zjistěte, zda jsou dané funkce prosté, ohraničené, sudé nebo liché, a sestrojte jejich graf.

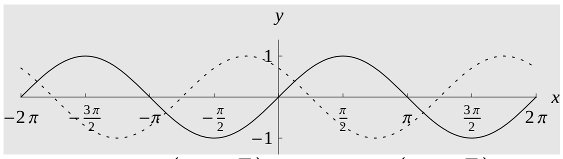
a) $y = 2x^2 + 3$
b) $y = (x-1)^3$
c) $y = 3|\cos x|$
d) $y = (x+1)^2 - 2$



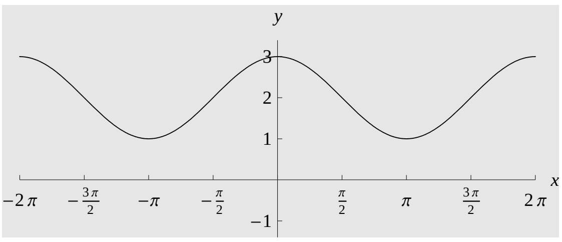
Obr. 3.9: K příkladu 3.5.5.



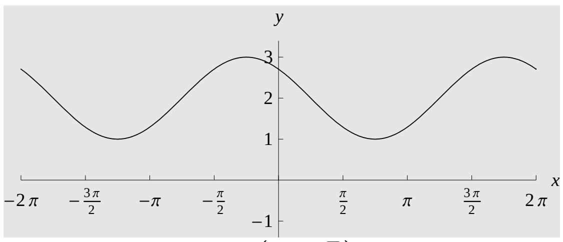
$$y = \sin\frac{x}{2},\ y = \sin x,\ y = \sin 2x$$



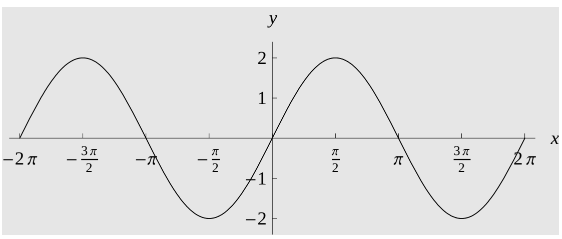
$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right),\ y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$



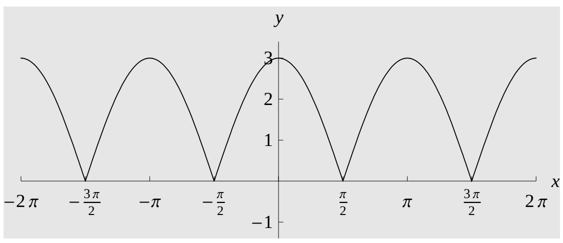
$$y = \cos x + 2$$



$$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$$



$$y = 2\sin x$$



$$y = |3\cos x|$$

Obr. 3.10: K příkladu 3.5.6.

Kapitola 4

Posloupnosti

4.1 Pojem posloupnosti, rekurentní určení posloupnosti

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je každá funkce definovaná na množině přirozených čísel.

4.1.1. Napište prvních pět členů posloupnosti dané vzorcem pro n-tý člen:

a) $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ $\left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right]$

b) $\left(\dfrac{1-\cos(n\pi)}{2}\right)_{n=1}^{\infty}$ $[1, 0, 1, 0, 1]$

c) $\left(\dfrac{3n+1}{2n-5}\right)_{n=1}^{\infty}$ $\left[-\frac{4}{3}, -7, 10, \frac{13}{3}, \frac{16}{5}\right]$

d) $\left((-1)^n \cdot \dfrac{1}{n^3}\right)_{n=1}^{\infty}$ $\left[-1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{64}, -\frac{1}{125}\right]$

e) $\left(\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)_{n=1}^{\infty}$ $[1, 0, -1, 0, 1]$

4.1.2. Vyjádřete dané posloupnosti pomocí vzorce pro n-tý člen:

a) $\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \dots$ $\left[\left(\frac{n+1}{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}\right]$

b) $2, -2, 2, -2, \dots$ [např. $(-2\cos(n\pi))_{n=1}^{\infty}$]

c) $1, 3, 9, 27, 81, \dots$ $\left[\left(3^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}\right]$

d) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}$ $\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{5}\right]$

e) $1, 8, 27, 64, 125, 216$ $\left[\left(n^3\right)_{n=1}^{6}\right]$

4.1.3. Je dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \log 3^n$. Vyjádřete ji rekurentně.

Řešení: Rekurentní určení posloupnosti je takový způsob zadání posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kdy je dán první člen (resp. první dva členy) a dále je k dispozici vzorec, pomocí něhož můžeme pro každé $n \in \mathbb{N}$ vypočítat člen a_{n+1} na základě znalosti předchozího členu a_n.

V tomto případě pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$a_{n+1} = \log 3^{n+1} = \log\left(3^n \cdot 3\right) = \log 3^n + \log 3 = a_n + \log 3.$$

Zkoumanou posloupnost lze tedy rekurentně zadat takto:

$$a_1 = \log 3; \qquad a_{n+1} = a_n + \log 3.$$

Můžeme ji ovšem vyjádřit např. i tímto způsobem

$$a_1 = \log 3; \qquad a_2 = \log 9; \qquad a_{n+2} = a_n + \log 9.$$

4.1.4. Posloupnosti vyjádřené vzorcem pro n-tý člen vyjádřete rekurentně:

a) $(\log_2 10^n)_{n=1}^{\infty}$ $[a_1 = \log_2 10;\ a_{n+1} = \log_2 10 + a_n]$
b) $(n+2)_{n=1}^{\infty}$ $[a_1 = 3;\ a_{n+1} = a_n + 1]$
c) $(n-2)_{n=1}^{\infty}$ $[a_1 = -1;\ a_{n+1} = a_n + 1]$
d) $(2n)_{n=1}^{\infty}$ $[a_1 = 2;\ a_{n+1} = a_n + 2]$
e) $(2^n)_{n=1}^{\infty}$ $[a_1 = 2;\ a_{n+1} = 2a_n]$
f) $((-1)^n \cdot 2)_{n=1}^{\infty}$ $[a_1 = -2;\ a_{n+1} = -a_n]$

4.1.5. Vypište prvních pět členů posloupnosti zadané rekurentně:

a) $a_1 = 2; \quad a_{n+1} = 3a_n, \quad n \in \mathbb{N}$ $[2, 6, 18, 54, 162]$
b) $a_1 = 1; \quad a_2 = 1; \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \in \mathbb{N}$ $[1, 1, 0, -1, -1]$
c) $a_1 = 0; \quad a_2 = 1; \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n, \quad n \in \mathbb{N}$ $[0, 1, 2, 1, -4]$
d) $a_1 = -2; \quad a_{n+1} = -2a_n, \quad n \in \mathbb{N}$ $[-2, 4, -8, 16, -32]$

4.1.6. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je určena rekurentně takto: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Vyjádřete ji vzorcem pro n-tý člen.

Řešení: Platí:

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 \\ a_3 &= 2a_2 \\ a_4 &= 2a_3 \\ &\dots \\ a_{n-1} &= 2a_{n-2} \\ a_n &= 2a_{n-1} \end{aligned}$$

Těchto $n-1$ rovností mezi sebou vynásobíme a dostaneme

$$a_2\, a_3\, a_4 \dots a_{n-1}\, a_n = 2a_1 \cdot 2a_2 \cdot 2a_3 \cdot \ldots \cdot 2a_{n-2} \cdot 2a_{n-1},$$

čili

$$a_2\, a_3\, a_4 \dots a_{n-1}\, a_n = 2^{n-1} \cdot a_1\, a_2\, a_3 \dots a_{n-2}\, a_{n-1}.$$

Žádný člen posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ není roven nule. Proto můžeme obě strany poslední rovnosti vydělit výrazem $a_2\, a_3\, a_4 \dots a_{n-2}\, a_{n-1}$ a dostaneme vztah pro a_n:

$$a_n = 2^{n-1} a_1.$$

Víme, že $a_1 = 1$, a tedy $a_n = 2^{n-1}$. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zapíšeme pomocí vzorce pro n-tý člen takto:

$$\left(2^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}.$$

4.1.7. Dané posloupnosti jsou určeny rekurentně. Vyjádřete je vzorcem pro n-tý člen:

a) $a_1 = 1;\ a_{n+1} = a_n,\ n \in \mathbb{N}$ $[(1)_{n=1}^{\infty}]$
b) $a_1 = 1;\ a_{n+1} = -a_n,\ n \in \mathbb{N}$ $\left[\left((-1)^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}\right]$
c) $a_1 = 5;\ a_{n+1} = a_n + 4,\ n \in \mathbb{N}$ $[(4n+1)_{n=1}^{\infty}]$
d) $a_1 = 2;\ a_{n+1} = 3a_n,\ n \in \mathbb{N}$ $\left[\left(2 \cdot 3^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}\right]$
e) $a_1 = 0;\ a_{n+1} = 3 + a_n,\ n \in \mathbb{N}$ $[((n-1) \cdot 3)_{n=1}^{\infty}]$
f) $a_1 = 0;\ a_{n+1} = 2 - a_n,\ n \in \mathbb{N}$ $[(1 + (-1)^n)_{n=1}^{\infty}]$

4.2 Aritmetická a geometrická posloupnost

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **aritmetická**, právě když existuje takové reálné číslo d, že pro každé přirozené číslo n je

$$a_{n+1} = a_n + d, \tag{4.1}$$

kde d se nazývá *diference* aritmetické posloupnosti. Platí

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \qquad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \tag{4.2}$$

$$\forall r, s \in \mathbb{N}: \ a_s = a_r + (s-r)d. \tag{4.3}$$

Pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti platí

$$s_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right). \tag{4.4}$$

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **geometrická**, právě když existuje takové reálné číslo q, že pro každé přirozené číslo n je

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \tag{4.5}$$

kde q se nazývá *kvocient* geometrické posloupnosti. Platí

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \qquad | \, a_n \, | = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}, \tag{4.6}$$

$$\forall r, s \in \mathbb{N}: \ a_s = a_r \cdot q^{s-r}. \tag{4.7}$$

Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti platí

$$q = 1: \qquad s_n = n \cdot a_1, \tag{4.8}$$

$$q \neq 1: \qquad s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}. \tag{4.9}$$

4.2.1. Vypočtěte žádané prvky aritmetické posloupnosti:

a) $d = -12, \ a_n = 15, \ s_n = 456, \ n = ?, \ a_1 = ?$ $[n = 8, \ a_1 = 99]$

b) $a_1 = 6, \ s_{10} = 195, \ a_{10} = ?, \ d = ?$ $[a_{10} = 33, \ d = 3]$

4.2.2. Určete aritmetickou posloupnost, u které platí:

$a_1 + a_4 + a_6 = 71, \qquad a_5 - a_2 - a_3 = 2$ $[a_1 = 5, \ d = 7]$

4.2.3. Určete a_1 a q u geometrické posloupnosti, u níž platí

a) $a_1 + a_4 = 112, \quad a_2 + a_3 = 48$ $[a_1 = 4, \ q = 3, \ a_1 = 108, \ q = 1/3]$

b) $a_7 - a_5 = 48, \quad a_6 + a_5 = 48, \quad s_n = 1023$ $[a_1 = 1, \ q = 2, \ n = 10]$

4.2.4. Vypočítejte, kolik máte pra... prababiček.

Řešení: Každý máme dva rodiče, čtyři prarodiče (2 babičky a 2 dědečky), osm praprarodičů (4 prababičky a 4 pradědečky), atd. Kolik máme (pra)^n-babiček? Je to polovina z celkového počtu (pra)$^{n+1}$-rodičů (uvažujeme jen ženy), výsledek tedy je:

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{n+2} = 2^{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Limita pro $n \to \infty$ je nevlastní, počet pra... prababiček stále roste.

4.2.5. Strany pravoúhlého trojúhelníka tvoří aritmetickou posloupnost. Delší odvěsna měří 24. Vypočtěte obvod trojúhelníka. [72]

4.2.6. Stanovte takové číslo, aby zvětšeno postupně o 7, 15, 27 dalo tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. [9]

4.2.7. Buduje se hlediště letního kina přibližně pro 1 200 diváků. Do první řady je plánováno 40 sedadel, do každé následující řady postupně o 4 sedadla více. Kolik řad sedadel bude mít hlediště? [17]

4.2.8. Část střechy domu má tvar lichoběžníku a je ji třeba pokrýt taškami. Víme, že do řady u hřebenu se vejde 85 tašek, do spodní řady při okapu 102 tašek. Přitom tašky budou srovnány do řad tak, že v každé následující řadě bude o jednu tašku více než v řadě předchozí. Kolik je třeba tašek na pokrytí části střechy? [1 683]

4.2.9. Poločas rozpadu radia C (RaC) je přibližně 20 minut. Počáteční hmotnost radia C je 3 mg. Jaká bude hmotnost radia za 2 hodiny? (Poločasem rozpadu nazýváme dobu, za kterou se rozpadne polovina počáteční hmotnosti radioaktivní látky.) $[\frac{3}{64}\ \mathrm{mg}]$

4.2.10. Teplota Země roste do hloubky přibližně o 1°C na 33 metrů. Jaká je teplota na dně dolu 1 015 metrů hlubokého, je-li v hloubce 25 metrů teplota 9°C? [39°C]

4.2.11. Světelný paprsek ztrácí při průchodu skleněnou deskou $\frac{1}{12}$ své intenzity. Jaká je intenzita paprsku po průchodu čtyřmi stejnými deskami? $\left[\left(\frac{11}{12}\right)^4\right]$

4.2.12. Určete součet všech přirozených čísel od 1 do 100. [5 050]

4.2.13. Vypočítejte součet všech sudých trojciferných přirozených čísel. [247 050]

4.2.14. Množství dřeva v jedné lesní oblasti je odhadnuto na $5,5 \cdot 10^5\ \mathrm{m}^3$, roční přírůstek je 2,3%. Kolik krychlových metrů dřeva bude v této oblasti za tři roky? S těžbou se nepočítá. $\left[\doteq 5,9 \cdot 10^5\ \mathrm{m}^3\right]$

4.2.15. Ve městě žilo na počátku roku 2007 23 600 obyvatel. Kolik obyvatel lze očekávat na počátku roku 2012, jestliže se roční přírůstek odhaduje na 1,8%? [25 800]

4.2.16. Kuřák prokouří ročně 1 200 Kč. Kolik by uspořil za 50 let, kdyby tuto částku vždy počátkem roku ukládal na vkladní knížku při ročním úročení 8%? (Počítejte daň z úroků ve výši 15%.) [486 752]

4.2.17. Za kolik let klesne hodnota předmětu na méně než desetinu původní ceny, jestliže ročně odepisujeme 18% ceny předmětu z předchozího roku? [12]

4.2.18. Traktor jede po přímé silnici rychlostí $10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. V okamžiku, kdy projíždí místem M, vyjíždí z tohoto místa týmž směrem osobní auto, které za první sekundu ujede 3 m a za každou následující sekundu o 2 m více než za předcházející sekundu. Vypočtěte, za kolik sekund auto dohoní traktor. [8 s]

4.2.19. Občan získal počátkem roku 2007 od banky úvěr ke koupi bytu ve výši 400 000 Kč, a to na dobu šesti let s roční úrokovou mírou 10% (úrokovací období je 1 rok). Úvěr bude splacen v šesti stejných ročních splátkách, první po jednom roce od poskytnutí úvěru. Kolik korun bude činit jedna splátka? Kolik korun celkem občan bance zaplatí? [jedna splátka 91 843 Kč; celkem 551 058 Kč]

4.2.20. Banka poskytla podnikateli počátkem roku 2007 úvěr ve výši 2 500 000 Kč, a to na dobu pěti let s roční úrokovou mírou 13,5% (úrokovací období je 1 rok). Podnikatel bude dluh splácet pravidelně ve stejných ročních splátkách, první po jednom roce od poskytnutí úvěru. Vypočítejte výši jedné splátky.

Řešení: Neznámou je výše jedné splátky, označme ji s Kč.

Dluh podnikatele na konci roku 2007 (banka si připsala úroky):

$$\left[2.5 \cdot 10^6 \cdot (1 + 0.135)\right] \text{Kč}$$

Dluh na počátku roku 2008 (po první splátce):

$$\left[2.5 \cdot 10^6 \cdot (1 + 0.135) - s\right] \text{Kč}$$

Dluh na počátku roku 2009 (po připsání úroků z dluhu za rok 2008 a po druhé splátce):

$$\begin{aligned} &\left[\left(2.5 \cdot 10^6 \cdot (1 + 0.135) - s\right) \cdot (1 + 0.135) - s\right] \text{Kč} \\ = &\left[2.5 \cdot 10^6 \cdot (1 + 0.135)^2 - s(1 + 0.135) - s\right] \text{Kč} \end{aligned}$$

Dluh na počátku roku 2010 (po třetí splátce):

$$\begin{aligned} &\left[\left(2.5 \cdot 10^6 \cdot (1 + 0.135)^2 - s(1 + 0.135) - s\right)(1 + 0.135) - s\right] \text{Kč} \\ = &\left[2.5 \cdot 10^6 \cdot (1 + 0.135)^3 - s(1 + 0.135)^2 - s(1 + 0.135) - s\right] \text{Kč} \end{aligned}$$

atd., dluh na počátku roku 2012 (po páté splátce):

$$[2.5 \cdot 10^6 \cdot (1+0.135)^5 - s(1+0.135)^4 - s(1+0.135)^3 - s(1+0.135)^2 - s(1+0.135) - s] \text{ Kč}$$

Úvěr bude na počátku roku 2012 splacen, je tedy

$$2.5 \cdot 10^6 \cdot (1+0.135)^5 - s\left[(1 + 0.135)^4 + (1 + 0.135)^3 + (1 + 0.135)^2 + (1 + 0.135) + 1\right] = 0$$

S využitím vzorce (4.9) pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti dostaneme

$$2.5 \cdot 10^6 \cdot (1 + 0.135)^5 - s\,\frac{(1 + 0.135)^5 - 1}{(1 + 0.135) - 1} = 0$$

Odtud je

$$\begin{aligned} s &= \frac{2.5 \cdot 10^6 \cdot (1 + 0.135)^5 \cdot 0.135}{(1 + 0.135)^5 - 1} \\ s &\doteq 719\,478 \end{aligned}$$

Výše jedné splátky činí 719 478 Kč.

4.2.21. Občan si založil na konci roku 2005 osobní konto s roční úrokovou mírou 6% a se čtvrtletním úrokovacím obdobím. Na konto ihned uložil 5 000 Kč a stejnou částku pak pravidelně ukládal na konci každého čtvrtletí roku 2006, přitom z konta žádný obnos nevybral. Jak vysoká částka byla na jeho osobním kontě na konci roku 2006? Daň z úroků je 15%.

[25 646]

4.2.22. Vkladatel měl na vkladní knížce s výpovědní lhůtou uloženo po dobu tří let 8 000 Kč. První dva roky byla úroková míra 6%, další rok 5,2%. Jak vysokou částku bude mít na vkladní knížce na konci třetího roku, jestliže v průběhu celé úrokovací doby nevybral žádné úroky? Úrokovací období je jeden rok. [9 227 Kč]

posloupnost	**definiční vlastnost**
rostoucí	$\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n < a_{n+1}$
klesající	$\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n > a_{n+1}$
neklesající	$\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \leq a_{n+1}$
nerostoucí	$\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \geq a_{n+1}$
shora omezená	$\exists k \in \mathbb{R}; \ \forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \leq k$
zdola omezená	$\exists l \in \mathbb{R}; \ \forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \geq l$

Tabulka 4.1: Základní vlastnosti posloupností

4.3 Vlastnosti posloupností

Základní vlastnosti posloupností jsou shrnuty v tabulce 4.1.
Každá rostoucí posloupnost je neklesající. Každá klesající posloupnost je nerostoucí. Posloupnosti, které jsou nerostoucí nebo neklesající, se nazývají **monotónní** posloupnosti. Posloupnost se nazývá **omezená**, právě když je omezená shora i zdola.

4.3.1. Je dána posloupnost $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

a) Dokažte, že daná posloupnost je klesající.

b) Rozhodněte, zda uvedená posloupnost je shora omezená, zdola omezená nebo omezená.

c) Vyjádřete tuto posloupnost rekurentně.

Řešení:

a) Máme dokázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ neboli $n+1 > n$. Tato nerovnost je pro každé $n \in \mathbb{N}$ pravdivá. Tím jsme dokázali, že daná posloupnost je klesající.

b) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{n} > 0$, to znamená, že daná posloupnost je zdola omezená. Zároveň pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{n} \leq 1$. Proto je daná posloupnost také shora omezená. Z toho plyne, že daná posloupnost je omezená.

c) Pro $n = 1$ dostaneme $a_1 = 1$. Protože $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, platí pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{a_n} + 1} = \frac{a_n}{a_n + 1}.$$

Danou posloupnost můžeme rekurentně vyjádřit takto:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}.$$

4.3.2. Je dána posloupnost $\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$.

a) Dokažte, že daná posloupnost je klesající.

b) Rozhodněte, zda uvedená posloupnost je shora omezená, zdola omezená, omezená. [omezená]

c) Vyjádřete tuto posloupnost rekurentně. $\left[a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n\right]$

4.3.3. Je dána posloupnost $(\log 2^n)_{n=1}^{\infty}$.

a) Dokažte, že daná posloupnost je rostoucí.

b) Rozhodněte, zda uvedená posloupnost je shora omezená, zdola omezená, omezená. [zdola omezená]

c) Vyjádřete tuto posloupnost rekurentně. $[a_1 = \log 2,\ a_{n+1} = a_n + \log 2]$

4.3.4. Dokažte, že posloupnost

a) $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je klesající

b) $\left(\dfrac{2n+1}{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí

c) $\left(\dfrac{1}{2+3n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je omezená

d) $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je omezená

e) $(\sin n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená

4.4 Limity posloupností

Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentní**, právě když existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že platí: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$.

Číslo a se nazývá **limita posloupnosti** a zapisuje se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

- Posloupnosti, které nejsou konvergentní, se nazývají **divergentní**.
- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.
- Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Základní limity posloupností:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad (\text{typ } \tfrac{1}{\infty}) \tag{4.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad (\text{typ } \tfrac{\infty}{\infty}) \tag{4.11}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad (\text{typ } \infty^0) \tag{4.12}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \qquad (\text{typ } 1^\infty) \tag{4.13}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \mathrm{e}^k \tag{4.14}$$

4.4.1. Vypočítejte limitu posloupnosti $\left\{\dfrac{3n+5}{2n^2+7n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Řešení: Jedná se o typ $\frac{\infty}{\infty}$, limitu vypočteme rozšířením zlomku výrazem $\frac{1}{n^2}$ (volíme nejvyšší stupeň mocniny ve jmenovateli) a užitím vzorce 4.10 dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{2n^2+7n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{2n^2+7n+1}\cdot\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{7}{n}+\frac{1}{n^2}}\right) = \frac{0}{2} = 0.$$

Platí:

- stupeň polynomu ve jmenovateli je *totožný* se stupněm polynomu v čitateli $\Rightarrow$ limita se rovná koeficientům u nejvyšší mocniny,
- stupeň polynomu ve jmenovateli je *vyšší* než stupeň polynomu v čitateli $\Rightarrow \lim = 0$,
- stupeň polynomu ve jmenovateli je *nižší* než stupeň polynomu v čitateli $\Rightarrow \lim = \infty$.

4.4.2. Vypočítejte limity posloupností:

a) $\dfrac{7n^2+2n+1}{3n^2+6n+5}$ $\left[\dfrac{7}{3}\right]$

b) $\dfrac{4n^3+5n}{2n^2+7}$ $[\infty]$

c) $\dfrac{6n^2+8n-7}{2n^2+4}$ $[3]$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$ $[1]$

e) $\left(2+\dfrac{3}{n}\right)^3$ $[8]$

f) $\sqrt[n]{4}-16$ $[-15]$

g) $\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4+1}$ $[0]$

h) $(-1)^n$ $[\nexists]$

i) $\dfrac{\sin n+n}{\sin n-n}$ $\left(\text{využijte vztah } \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0\right)$ $[-1]$

4.4.3. Určete limity posloupností:

a) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ $[0]$

b) $\sqrt{n+3}-\sqrt{2n}$ $[-\infty]$

c) $\sqrt{n^2+3n-1}-n$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}-n}$ $[1]$

4.4.4. Vypočítejte následující limity posloupností:

a) $\left(\dfrac{n+5}{n}\right)^n$

b) $\left(\dfrac{5n+7}{n}\right)^n$

c) $\left(\dfrac{n+4}{5n-3}\right)^n$

Řešení:

a) Jedná se o typ 1^∞, upravíme a užitím vztahu (4.14) dostaneme:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n=\mathrm{e}^5$$

b) Upravíme a použijeme vztah (4.10):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+7}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{7}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}5^n=\infty$$

c) Užitím vztahu (4.10) dostaneme:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{5n-3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{4}{n}}{5-\frac{3}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=0$$

4.4.5. Určete limity posloupností:

a) $\left(\dfrac{n+4}{n}\right)^n$ $\left[\mathrm{e}^4\right]$

b) $\left(\dfrac{2n+3}{n}\right)^n$ $[\infty]$

c) $\left(\dfrac{n+2}{3n-1}\right)^n$ $[0]$

d) $\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^n$ $\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}\right]$

e) $\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)^{n+2}$ $[\mathrm{e}]$

f) $\left(\dfrac{n+5}{n+4}\right)^{1-3n}$ $\left[\mathrm{e}^{-3}\right]$

g) $\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{2n}$ $\left[\mathrm{e}^2\right]$

h) $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{3n+6}$ $\left[\mathrm{e}^{-3}\right]$

Kapitola 5

Limita funkce

Limita (*limita zleva*; *limita zprava*) funkce $f(x)$ v bodě a je rovna číslu L, jestliže ke každému ε-okolí bodu L existuje takové ryzí δ-okolí (levé δ-okolí; pravé δ-okolí) bodu a, že pro všechna x z tohoto δ-okolí platí, že $f(x)$ patří do ε-okolí bodu L, tj. pro všechna x taková, že $|x - a| < \delta$ platí $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Zapisujeme:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L; \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L; \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

Je zřejmé, že číslo L je limitou funkce $f(x)$ v bodě a právě tehdy, existuje-li v tomto bodě jak limita zprava, tak limita zleva a jsou si rovny.

Důležitým pojmem je *spojitost funkce v bodě*, definovaná požadavkem

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Analogicky definujeme *spojitost zleva* a *spojitost zprava.*

Pro počítání s limitami platí:

- limita z konstanty je táž konstanta: $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{C} = \mathrm{C}$,
- limita součtu (rozdílu, podílu, součinu) funkcí je rovna součtu (rozdílu, podílu, součinu) limit, pokud uvedené výrazy mají smysl.

Stručný postup při výpočtu $\lim\limits_{x \to a} f(x)$:

1. nejprve vždy zkusíme dosadit $x = a$;
2. je-li funkce $f(x)$ v bodě a spojitá, je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$;
3. není-li funkce $f(x)$ v bodě a spojitá, dostaneme po dosazení buď výraz $\frac{k}{0}$, což vede k nevlastní limitě v bodě a (počítáme *jednostranné limity*), nebo některý z následujících neurčitých výrazů:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty,$$

   v těchto případech provedeme vhodnou úpravou „vykrácení nepohodlného výrazu“ a limitu vypočteme, nebo k výpočtu limity použijeme L'Hospitalovo pravidlo (viz následující kapitola).

Základní limity funkcí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad (\text{typ } \tfrac{1}{\infty}) \tag{5.1}$$
$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1, \quad x > 0 \qquad (\text{typ } \infty^0) \tag{5.2}$$
$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0, \quad 0 < a < 1 \tag{5.3}$$
$$\lim_{x\to\infty} a^x = 1, \quad a = 1 \tag{5.4}$$
$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty, \quad a > 1 \tag{5.5}$$

Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a

5.1.1. Vypočtěte: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-1}{2^x}$

Řešení: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-1}{2^x} = \dfrac{3\cdot 2^2 - 1}{2^2} = \dfrac{11}{4}$,
neboť limita funkce $f(x)$ v bodě a, v němž je funkce spojitá, je rovna funkční hodnotě $f(a)$.

5.1.2. Určete limity:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+3}{x-3}$ [−5]

b) $\lim\limits_{x\to 3} \left(x^2 \cdot 2^x\right)$ [72]

c) $\lim\limits_{x\to 2} \left(x^2 - 3x + 2\right)$ [0]

d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x-2}{2x^3+x^2-x-2}$ [1]

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 3x + \sin 5x}{\sin x - \sin 3x}$ [0]

Výpočet limity metodou „vykrácení nepohodlného výrazu“ – typ $\frac{0}{0}$

5.1.3. Vypočítejte $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x^2+6x-16}{x+2} + \dfrac{x^2-4}{x-2}\right)$.

Řešení:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+6x-16}{x+2} + \frac{x^2-4}{x-2}\right) &= \lim_{x\to 2}\frac{x^2+6x-16}{x+2} + \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \\ &= 0 + \lim_{x\to 2}(x+2) = 0 + 4 = 4.\end{aligned}$$

5.1.4. $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$

Řešení:

$$\lim_{x\to 6} \frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+3}{\sqrt{x+3}+3} = \lim_{x\to 6} \frac{(x-6)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}{x+3-9} = \lim_{x\to 6}\left(\sqrt{x+3}+3\right) = 6$$

5.1.5. Vypočítejte limity

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ $[2]$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-8x+15}$ $\left[-\dfrac{1}{2}\right]$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ $[4]$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$ $\left[\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right]$

e) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$ $\left[\dfrac{1}{4}\right]$

Limity goniometrických funkcí typu $\dfrac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(kx)}{kx} = \lim_{x\to 0}\frac{kx}{\sin(kx)} = 1, \tag{5.6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(kx)}{kx} = \lim_{x\to 0}\frac{kx}{\operatorname{tg}(kx)} = 1, \tag{5.7}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(kx)}{kx}\right)^n = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}(kx)}{kx}\right)^n = 1, \tag{5.8}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0, \tag{5.9}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x} = 0. \tag{5.10}$$

5.1.6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x}$

Řešení: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}\cdot\dfrac{3}{3} = \dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x} = \dfrac{3}{2}.$

5.1.7. Určete:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$ $[3]$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x}$ $\left[\dfrac{3}{2}\right]$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$ $[1]$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

e) $\lim\limits_{x\to 0} (x \operatorname{cotg} x)$ $[1]$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$ $[1]$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$ $[0]$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 5x}$ $\left[\dfrac{1}{100}\right]$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$ $[8]$

Nevlastní limita funkce v bodě – typ $\dfrac{k}{0}$

Dostaneme-li po dosazení $x = a$ do limity výraz $\frac{k}{0}$, $k \neq 0$, nazveme jej „nekonečným výrazem“, který má buď nevlastní limitu ($\pm\infty$), nebo limita vůbec neexistuje. V tomto případě tedy počítáme *jednostranné limity*, přičemž hlavním úkolem je určení znaménka. Jsou-li obě jednostranné limity stejné, existuje limita funkce v tomto bodě.

Limitu funkce $f(x)$ v bodě a zprava (zleva) lze určit zavedením nové proměnné $t > 0$ substitucí $x = a + t$ ($x = a - t$) a výpočtem limity nové funkce pro $t \to 0$:
limita zprava:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{t\to 0} f(a+t), \quad \text{kde } t > 0$$

limita zleva:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{t\to 0} f(a-t), \quad \text{kde } t > 0$$

Této metody se užívá zvláště u složitějších funkcí, kdy se nedá určit limita zprava (zleva) přímo.

5.1.8. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

Řešení: Funkce v bodě $x = 2$ není definována.

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = |\text{ subst.: } x = 2+t\ | = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = \lim_{t\to 0} 1 = 1,$$
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = |\text{ subst.: } x = 2-t\ | = \lim_{t\to 0} \frac{|-t|}{-t} = \lim_{t\to 0}(-1) = -1.$$

Limita zprava se nerovná limitě zleva, hledaná limita $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$ tedy neexistuje.

5.1.9. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{5+3x}{3-x}$

Řešení: Po dosazení dostáváme výraz $\frac{14}{0}$, počítáme tedy limity zprava a zleva:

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{5+3x}{3-x} = |\text{ subst.: } x = 3+t,\ t>0\ | = \lim_{t\to 0^+} \frac{5+3(3+t)}{3-(3+t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{14+3t}{-t} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{5+3x}{3-x} = |\text{ subst.: } x = 3-t,\ t>0\ | = \lim_{t\to 0^+} \frac{5+3(3-t)}{3-(3-t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{14-3t}{t} = +\infty.$$

Funkce $\dfrac{5+3x}{3-x}$ má v bodě $x = 3$ jednostranné nevlastní limity, které se sobě nerovnají, limita proto neexistuje.

5.1.10. Vypočítejte limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x$ $[-\infty]$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ $[\nexists]$

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}$ $[-\infty]$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}$ $[+\infty]$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2}$ $[\nexists]$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ $[\infty]$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ $[\nexists]$

Limity v nevlastních bodech $+\infty$; $-\infty$

5.1.11. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

Řešení: Výraz rozšíříme, upravíme a použijeme známý vztah $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}-x}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3x}+x}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1} = \frac{3}{2}.$$

5.1.12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-5x^2+7}{3x^4+10x^2+3x}$

Řešení: Zlomek rozšíříme (volíme nejvyšší stupeň mocniny x ve jmenovateli – viz kap. 4.4):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-5x^2+7}{3x^4+10x^2+3x} \cdot \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{7}{x^4}}{3+\frac{10}{x^2}+\frac{3}{x^3}} = \frac{0}{3} = 0.$$

5.1.13. Vypočítejte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-6x^2+10}{4x^3+10x^2+6x}$ $\left[\dfrac{3}{4}\right]$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4-6x^2+10}{4x^3+10x^2+6x}$ $[\infty]$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-6x^2+10}{4x^4+10x^2+6x}$ $[0]$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ $[1]$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ $[0]$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^{3x}-1}$ $[0]$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{\left(2x^3-2x\right)^{\frac{1}{3}}}$ $\left[2^{-\frac{1}{3}}\right]$

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{x+1}$ $\left[\dfrac{\pi}{4}\right]$

5.1.14. Ze znalosti průběhu daných funkcí určete

a) $\lim\limits_{x\to 0} a^x \quad (a > 0)$ [1]

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ [$\nexists$]

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos x$ [$\nexists$]

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x$ $\left[-\frac{\pi}{2}\right]$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arccotg} x$ [0]

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} x$ [π]

Limity vedoucí na e

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \qquad (\text{typ } 1^\infty) \tag{5.11}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \mathrm{e}^k \qquad (\text{typ } 1^\infty) \tag{5.12}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e} \qquad (\text{typ } 1^\infty) \tag{5.13}$$

5.1.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x+2}$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{x+2} =$$

$$\left|\ \text{subst.: } \frac{2}{x+1} = \frac{1}{m} \quad \Rightarrow \quad x = 2m-1, \quad x\to\infty \ \Rightarrow \ m\to\infty\ \right|$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{2m+1} = \lim_{m\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^2 \cdot \left(1+\frac{1}{m}\right)^1\right\} =$$

$$= \mathrm{e}^2 \cdot 1 = \mathrm{e}^2.$$

5.1.16. Určete:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+4}\right)^x$ [e]

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{2x+4}$ [e^{-2}]

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2}\right)^{x^2+1}$ [e^{2}]

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$ [e^{3}]

Kapitola 6

Diferenciální počet

6.1 Derivace funkce

Definice derivace funkce $f(x)$ v bodě a:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}. \tag{6.1}$$

Derivace má geometrický význam *směrnice tečny* ke grafu funkce $f(x)$ v bodě o souřadnicích $[a; f(a)]$ (viz obr. 6.1).

6.1.1. Z definice derivace vypočtěte derivaci funkce $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 4$.

Řešení: Vyjádříme nejprve

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= 2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) + 4 - 2x^3 - 5x^2 + 7x - 4 \\ &= 6x^2 \Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 + 10x\Delta x + 5(\Delta x)^2 - 7\Delta x \end{aligned}$$

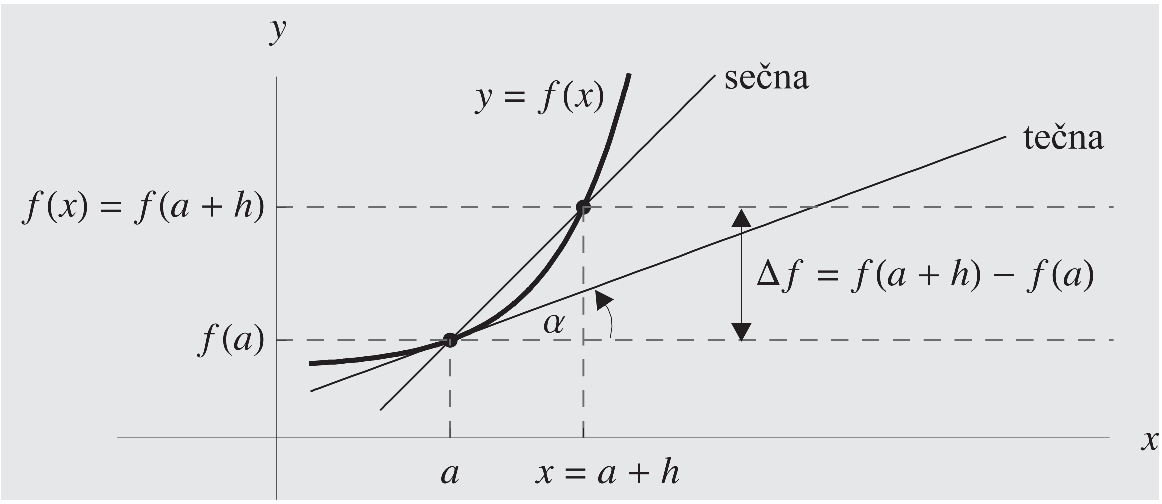
$$\begin{aligned} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} &= 6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 10x + 5\Delta x - 7 \\ y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} &= 6x^2 + 10x - 7 \end{aligned}$$

Pravidla pro derivování funkcí

Nechť funkce $u = u(x)$, $v = v(x)$ mají v daném bodě x derivace u', v'. Platí:

1. $(\mathrm{c} \cdot u)' = \mathrm{c} \cdot u'$, kde $\mathrm{c} = \text{konst.}$,
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$,
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$,
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, kde $v \neq 0$,
5. derivace *funkce složené*: nechť $y = f(g)$, $g = g(x)$, tj. $y = f[g(x)]$, kde funkce $f(g)$ má v bodě g a funkce $g(x)$ má v bodě x derivaci, pak

$$(f\,[g(x)])' = f'\,[g(x)] \cdot g'(x).$$



Obr. 6.1: Geometrický význam derivace, problém tečny.

Základní vzorce pro derivování elementárních funkcí

1. $(\mathrm{C})' = 0,\quad$ kde C je konstanta,
2. $(x)' = 1,$
3. $(x^n)' = n\,x^{n-1},\quad$ kde n je reálné číslo,
4. $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x,$
5. $(a^x)' = a^x \ln a,\quad$ kde a je kladná reálná konstanta,
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x},$
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\quad$ kde a je kladná reálná konstanta, $a \neq 1,$
8. $(\sin x)' = \cos x,$
9. $(\cos x)' = -\sin x,$
10. $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},$
11. $(\mathrm{cotg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x},$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad$ pro $|x| < 1,$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad$ pro $|x| < 1,$
14. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2},$
15. $(\mathrm{arccotg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2},$
16. $(\sinh x)' = \cosh x,$
17. $(\cosh x)' = \sinh x,$
18. $(\mathrm{tgh}\, x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x},$
19. $(\mathrm{cotgh}\, x)' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}.$

6.1.2. Užitím pravidla pro derivování podílu dvou funkcí dokažte, že:
$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, kde $x \neq (2k+1)\,\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$

Pomocí základních pravidel a vzorců najděte derivaci funkce:

6.1.3. $y = x\sqrt{x}\,(3\ln x - 2)$

Řešení: Funkci upravíme na tvar

$$\begin{aligned} y &= x^{3/2}(3\ln x - 2) \\ y' &= \frac{3}{2}x^{1/2}(3\ln x - 2) + x^{3/2}\frac{3}{x} = 3\sqrt{x}\Big(\frac{3}{2}\ln x - 1 + 1\Big) = \frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x\,. \end{aligned}$$

6.1.4. $y = \sqrt{x^2 - 3x + 15}$

Řešení: Daná funkce je složená. Její složky jsou $g(x) = x^2 - 3x + 15$ a $f(g) = \sqrt{g}$. Podle pravidla o derivaci funkce složené dostaneme

$$f'(x) = \Big(\sqrt{g(x)}\Big)' \cdot g'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\right)(2x - 3) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 15}}\,.$$

6.1.5. Najděte derivaci daných funkcí:

a) $y = \sqrt{x}$ $\left[\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right]$

b) $y = x^4 - 3x^2 + \dfrac{x}{2} - 2$ $\left[4x^3 - 6x + \dfrac{1}{2}\right]$

c) $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 4$ $\left[6x^2 + 10x - 7\right]$

d) $y = 3x^2 - 2x + 1$ $[6x - 2]$

e) $y = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$ $\left[\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right]$

f) $y = \sqrt{1 - x^2}$ $\left[-\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right]$

g) $y = \sqrt[3]{x^2\sqrt{x^4\sqrt{x^3}}}$ $\left[\dfrac{19}{12}\sqrt[12]{x^7}\right]$

h) $y = (5x^3 + x^2 - 4)^5$ $\left[5(15x^2 + 2x)(5x^3 + x^2 - 4)^4\right]$

6.1.6. a) $y = \dfrac{1}{x - 1}$ $\left[-\dfrac{1}{(x - 1)^2}\right]$

b) $y = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{3x}$ $\left[-\dfrac{3}{x^4} + \dfrac{4}{x^3} - \dfrac{1}{3x^2}\right]$

c) $y = \dfrac{2x - 3}{4 - x}$ $\left[\dfrac{5}{(4 - x)^2}\right]$

d) $y = \dfrac{x^2 + 1}{(1 - x)^2}$ $\left[\dfrac{2(x + 1)}{(1 - x)^3}\right]$

e) $y = \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^2$ $\left[-\dfrac{4(x + 1)}{(x - 1)^3}\right]$

f) $y = \dfrac{2}{(x^2 - x + 1)^2}$ $\left[-\dfrac{4(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^3}\right]$

g) $y = \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$ $\left[\dfrac{-1}{(1 + x)\sqrt{1 - x^2}}\right]$

6.1.7. a) $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$ $\left[-\dfrac{2\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}\right]$

b) $y = \dfrac{1}{e^x + 1}$ $\left[-\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}\right]$

c) $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ $\left[-x^2 e^{-x}\right]$

d) $y = e^{\sqrt{2x}}\left(\sqrt{2x} - 1\right)$ $\left[e^{\sqrt{2x}}\right]$

6.1.8. a) $y = 2^{x^2}$ $\left[2^{x^2} 2x \ln 2\right]$

b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $\left[\dfrac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\right]$

c) $y = \dfrac{2^{3x}}{3^{2x}}$ $\left[\left(\dfrac{8}{9}\right)^x \ln\dfrac{8}{9}\right]$

d) $y = \ln\left(2x^3 + 3x^2\right)$ $\left[\dfrac{6(x+1)}{x(2x+3)}\right]$

e) $y = \log_2\left(x + \sqrt{x^2+9}\right)$ $\left[\dfrac{1}{\ln 2\sqrt{x^2+9}}\right]$

f) $y = \log_{x^2} 2$ $\left[-\dfrac{\ln 2}{2x\ln^2 x}\right]$

6.1.9. $y = 5\sin^3\dfrac{x}{3}$

Řešení: $y' = 5\cdot 3\sin^2\dfrac{x}{3}\cdot\cos\dfrac{x}{3}\cdot\dfrac{1}{3} = 5\cdot\sin^2\dfrac{x}{3}\cdot\cos\dfrac{x}{3}.$

6.1.10. $y = \dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\,^2\sqrt{x} + \ln\cos\sqrt{x}$

Řešení:

$$\begin{aligned}
y' &= \mathrm{tg}\,\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\cos\sqrt{x}}(-\sin\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{x}\left(\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} - 1\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{x}\left(\frac{1-\cos^2\sqrt{x}}{\cos^2\sqrt{x}}\right) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{x}\left(\frac{\sin^2\sqrt{x}}{\cos^2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{tg}\,^3\sqrt{x}\,.
\end{aligned}$$

6.1.11. Určete derivace funkcí

a) $y = x\sin x + \cos x$ $[x\cos x]$

b) $y = \cos 2x$ $[-2\sin 2x]$

c) $y = \cos 2x - 2\sin x$ $[-2\cos x(2\sin x + 1)]$

d) $y = \left(2 - x^2\right)\cos x + 2x\sin x$ $\left[x^2\sin x\right]$

e) $y = \dfrac{1}{\cos x}$ $\left[\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}\right]$

f) $y = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$ $\left[\dfrac{-1}{1-\cos x}\right]$

g) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{2\sin 2x}$ $\left[\dfrac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 2x}\right]$

h) $y = \left(\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2}\right)^2$ $[-\cos x]$

6.1.12. a) $y = 3\text{cotg}\, x + \text{cotg}^3 x$ $\left[-\dfrac{3}{\sin^4 x}\right]$

b) $y = \text{tg}\, \dfrac{1+x}{x}$ $\left[\dfrac{-1}{x^2 \cos^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]$

c) $y = -\text{cotg}\, x - x$ $\left[\text{cotg}^2 x\right]$

d) $y = 5(\text{tg}\, x - x)$ $\left[5\text{tg}^2 x\right]$

e) $y = \ln \text{tg}\, x$ $\left[\dfrac{1}{\sin x \cos x}\right]$

f) $y = \log_2 \sin^2 x$ $\left[\dfrac{2}{\ln 2}\text{cotg}\, x\right]$

6.1.13. $y = \dfrac{\arcsin x}{x}$

Řešení: $y' = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}x - \arcsin x}{x^2} = \dfrac{x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$

6.1.14. $y = \arcsin \dfrac{2x^2}{1+x^4}$

Řešení:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}} \cdot \frac{4x(1+x^4) - 2x^2 \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} =$$

$$= \frac{1+x^4}{\sqrt{1-2x^4+x^8}} \cdot \frac{4x(1-x^4)}{(1+x^4)^2} = \frac{1+x^4}{\sqrt{(1-x^4)^2}} \cdot \frac{4x(1-x^4)}{(1+x^4)^2} = \frac{4x}{1+x^4}\ .$$

6.1.15. Určete derivaci funkcí

a) $y = \sin\left(3x^2+7\right) + \text{arctg}\,(x+1)$ $\left[6x\cos\left(3x^2+7\right) + \dfrac{1}{1+(x+1)^2}\right]$

b) $y = 3x^2 \ln\sqrt{2x+3} + \arccos(\ln(5x))$ $\left[6x\ln\sqrt{2x+3} + \dfrac{3x^2}{2x+3} - \dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(5x)}}\right]$

c) $y = \dfrac{3x^2+4}{2x^2-3} + \text{arccotg}\, 5^x$ $\left[\dfrac{-34x}{(2x^2-3)^2} - \dfrac{5^x \ln 5}{1+5^{2x}}\right]$

Derivace funkce typu $y = [f(x)]^{g(x)}$ („logaritmická“ derivace)

6.1.16. $y = (\sin x)^{\text{tg}\, x}$

Řešení: Danou funkci zlogaritmujeme, dostaneme

$$\ln y = \text{tg}\, x \ln \sin x,$$

derivujeme obě části rovnice podle x:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot y' &= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln \sin x + \text{tg}\, x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \\ \frac{1}{y} \cdot y' &= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln \sin x + 1 \end{aligned}$$

a vyjádříme hledanou derivaci y' (za y dosadíme výchozí funkci):

$$y' = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\cdot \ln\sin x + 1\right).$$

6.1.17. $y = \dfrac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}$

Řešení: Tuto funkci je také vhodné nejprve zlogaritmovat

$$\begin{aligned}
\ln y &= 3\ln(2x-1) + \frac{1}{2}\ln(3x+2) - 2\ln(5x+4) - \frac{1}{3}\ln(1-x)\\
\frac{1}{y}\cdot y' &= \frac{3}{2x-1}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3x+2} - 2\cdot\frac{5}{5x+4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1-x)}\\
y' &= \frac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}\left(\frac{6}{2x-1} + \frac{3}{2(3x+2)} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)}\right).
\end{aligned}$$

6.1.18. Najděte derivaci následujících funkcí (použijte logaritmickou derivaci):

a) $y = x^{\sin x}$ $\quad\left[x^{\sin x}\left(\cos x\ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right)\right]$

b) $y = x^{x^2}$ $\quad\left[x^{x^2+1}(2\ln x + 1)\right]$

c) $y = x^{\arcsin x}$ $\quad\left[x^{\arcsin x}\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\arcsin x}{x}\right)\right]$

d) $y = x^{\frac{1}{\ln x}}$ $\quad[0]$

e) $y = x^x$ $\quad[x^x(\ln x + 1)]$

f) $y = x^{-x}2^x x^2$ $\quad\left[\left(x^{-x}2^x x^2\right)\left(\ln 2 + \dfrac{2}{x} - \ln x - 1\right)\right]$

g) $y = x^{\ln x}$ $\quad\left[2x^{\ln x - 1}\ln x\right]$

h) $y = \dfrac{2^x(x+1)^3}{(x-1)^2\sqrt{2x+1}}$ $\quad\left[\dfrac{2^x(x+1)^3}{(x-1)^2\sqrt{2x+1}}\left(\ln 2 + \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{2(2x+1)}\right)\right]$

i) $y = \dfrac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3\sqrt[5]{5x-1}}$ $\quad\left[\dfrac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3\sqrt[5]{5x-1}}\left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2(x+1)} - \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{1}{5(5x-1)}\right)\right]$

j) $y = \sqrt[x]{(x+2)^2}$ $\quad\left[2\sqrt[x]{(x+2)^2}\left(\dfrac{1}{x(x+2)} - \dfrac{\ln(x+2)}{x^2}\right)\right]$

6.1.19. Je dána funkce $y = f(x)$. Vypočtěte $f'(0)$, $f'(-2)$, je-li:

a) $y = x^{10}$ $\quad\left[0;\ -10\cdot 2^9\right]$

b) $y = x^{-4}$ $\quad\left[\nexists;\ \dfrac{1}{8}\right]$

c) $y = \dfrac{2}{x}$ $\quad\left[\nexists;\ -\dfrac{1}{2}\right]$

d) $y = \sqrt[4]{x^5}$ $\quad[0;\ \nexists]$

e) $y = \sqrt[5]{\dfrac{1}{x^3}}$ $\quad\left[\nexists;\ -\dfrac{3}{10\sqrt[5]{8}}\right]$

f) $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ $\quad[\nexists;\ \nexists]$

Derivace funkce dané parametricky

Nechť funkce $f(x)$ je dána parametrickými rovnicemi

$$x = \phi(t),\; y = \psi(t), \qquad t \in \langle t_1; t_2 \rangle, \tag{6.2}$$

kde t je parametr, potom

$$\boxed{y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}} \equiv \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\,,} \tag{6.3}$$

kde tečkou značíme derivaci podle parametru t.

6.1.20. Najděte první derivaci y', je-li:

$$x = t(1 - \sin t)$$
$$y = t \cos t.$$

Řešení: $y' = \dfrac{\cos t - t\sin t}{1 - \sin t + t(-\cos t)} = \dfrac{\cos t - t\sin t}{1 - \sin t - t\cos t}.$

6.1.21. Najděte první derivace funkcí daných parametricky:

a) $x = t^3 + 3t + 1$
$y = 3t^5 + 5t^3 + 1$ $\quad [y' = 5t^2]$

b) $x = \mathrm{e}^{-t} \sin t$
$y = \mathrm{e}^{t} \cos t$ $\quad [y' = \mathrm{e}^{2t}]$

c) $x = a \cos^3 t$
$y = b \sin^3 t, \qquad t \in \langle 0; \pi \rangle$ $\quad [y' = -(b/a)\operatorname{tg} t]$

d) $x = 1 - t^2$
$y = 1 - t^3$ $\quad [y' = (3t^2 - 1)/(2t)]$

e) $x = \operatorname{tg} t$
$y = \cos^2 t$ $\quad [y' = -2\sin t \cos^3 t]$

Derivace funkce dané implicitně

Nechť je dána rovnice $F(x, y) = 0$, z níž nelze vyjádřit y explicitně. Derivaci y' najdeme tak, že obě části rovnice derivujeme podle x, přičemž y považujeme za funkci proměnné x, obdržíme lineární rovnici vzhledem k y'. Z této rovnice algebraicky určíme y'.

6.1.22. Najděte první derivaci y' funkce dané implicitně rovnicí $x^3 + \ln y - x^2\mathrm{e}^y = 0$.

Řešení: Derivujeme rovnici podle x, dostaneme

$$3x^2 + \frac{1}{y} \cdot y' - 2x\mathrm{e}^y - x^2\,\mathrm{e}^y\,\cdot y' = 0, \quad \text{odtud}$$
$$y' = \frac{(2x\mathrm{e}^y - 3x^2)y}{1 - x^2 y\,\mathrm{e}^y}$$

6.1.23. Najděte první derivace funkcí daných implicitně

a) $x^3 + y^3 - 3x = 0$ $\left[\dfrac{1-x^2}{y^2}\right]$

b) $x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4 - 5x^2 + 15y^2 - 100 = 0$ $\left[\dfrac{x}{3y}\right]$

c) $x^y - y^x = 0$ $\left[\dfrac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}\right]$

d) $x\sin y + y\sin x = 0$ $\left[-\dfrac{y\cos x + \sin y}{x\cos y + \sin x}\right]$

e) $y - x - \operatorname{arctg} y = 0$ $\left[\dfrac{1+y^2}{y^2}\right]$

f) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ $\left[\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}\right]$

g) $x^2 + 2x^3y + x\cos y + y^3 = 0$ $\left[-\dfrac{2x+6x^2y+\cos y}{2x^3+3y^2-x\sin y}\right]$

6.2 Derivace vyšších řádů

Derivací druhého řádu (druhou derivací) funkce $y = f(x)$ nazýváme funkci $(f')'$, tj. derivaci první derivace funkce $y = f(x)$.
Derivací n-tého řádu ($n = 2, 3, 4, \ldots$) funkce $y = f(x)$ nazýváme derivaci derivace řádu $(n-1)$:

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'} \tag{6.4}$$

Derivace vyšších řádů označujeme

$$y'', \quad y''', \quad y^{(4)}, \quad y^{(5)}, \quad \ldots, \quad y^{(n)}, \tag{6.5}$$

nebo

$$f''(x), \quad f'''(x), \quad f^{(4)}(x), \quad f^{(5)}(x), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x), \tag{6.6}$$

nebo

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}, \quad \frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}, \quad \frac{\mathrm{d}^5y}{\mathrm{d}x^5}, \quad \ldots, \quad \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\,. \tag{6.7}$$

6.2.1. Je dána funkce $y = -\dfrac{1}{9}x\sin 3x - \dfrac{2}{27}\cos 3x$.
Určete y''.

Řešení: Vypočteme nejprve y':

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{9}\sin 3x - \frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{2}{9}\sin 3x = \frac{1}{9}\sin 3x - \frac{1}{3}x\cos 3x \\ y'' &= (y')' = \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{3}\cos 3x + x\sin 3x = x\sin 3x. \end{aligned}$$

6.2.2. Vypočtěte derivaci n-tého řádu funkce $y = \sin x$.

Řešení:

$$
\begin{aligned}
y' &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\\
y'' &= -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\\
y''' &= -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)\\
&\ \vdots\\
y^{(n)} &= \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}
$$

6.2.3. Najděte derivaci 6. řádu funkce $y = x^5 - 7x^2 + 12$. [0]

6.2.4. Vypočtěte derivace 2. řádu funkcí

a) $y = -\dfrac{22}{x+5}$ $\left[\dfrac{-44}{(x+5)^3}\right]$

b) $y = \dfrac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$ $[\ln x]$

c) $y = \mathrm{e}^{-x^2}$ $\left[2\mathrm{e}^{-x^2}\left(2x^2-1\right)\right]$

d) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ $\left[-\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\right]$

e) $y = (1 + x^2)\operatorname{arctg} x$ $\left[2\operatorname{arctg} x + \dfrac{2x}{1+x^2}\right]$

Je-li funkce $y = f(x)$ zadána *parametricky* rovnicemi $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, pak druhá derivace je

$$
\boxed{y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\dot{(y')}}{\dot{x}},} \tag{6.8}
$$

kde tečkou značíme derivaci podle parametru t a první derivace y' je dána vztahem (6.3). Podobně získáme vztah pro třetí a čtvrtou derivaci:

$$
y''' = \frac{\dot{(y'')}}{\dot{x}}, \quad y^{(4)} = \frac{\dot{(y''')}}{\dot{x}} \quad \text{atd.} \tag{6.9}
$$

6.2.5. Vypočtěte y' a y'', je-li:

$$
\begin{aligned}
x &= a\cos^3 t\\
y &= a\sin^3 t.
\end{aligned}
$$

Řešení: Jedná se o funkci danou parametricky, první derivaci vypočteme podle vzorce (6.3):

$$
y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\left(a\sin^3 t\right)}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}\left(a\cos^3 t\right)}{\mathrm{d}t}} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\operatorname{tg} t\,,
$$

druhou derivaci určíme pomocí vztahu (6.8):

$$y'' = \frac{\dot{(y')}}{\dot{x}} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}(-\mathrm{tg}\, t)}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}(a\cos^3 t)}{\mathrm{d}t}} = \frac{-\dfrac{1}{\cos^2 t}}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}$$

6.2.6. Najděte první a druhé derivace funkcí daných parametricky

a) $x = 4t + t^2$

$y = t^3 + t, \quad t \geq 0$ $\left[y' = \dfrac{3t^2+1}{4+2t};\ y'' = \dfrac{3t^2+12t-1}{4(t+2)^3}\right]$

b) $x = a\sin t$

$y = a\cos t$ $\left[y' = -\mathrm{tg}\, t;\ y'' = -\dfrac{1}{a\cos^3 t}\right]$

c) $x = \ln t$

$y = \sin 2t, \quad t > 0$ $\left[y' = 2t\cos 2t;\ y'' = 2t(\cos 2t - 2t\sin 2t)\right]$

d) $x = r\cos t$

$y = r\sin t$ $\left[y' = -\mathrm{cotg}\, t;\ y'' = -\dfrac{1}{r\sin^3 t}\right]$

e) $x = a\cos^2 t$

$y = a\sin^2 t$ $\left[y' = -1;\ y'' = 0\right]$

f) $x = a\cos t$

$y = a(1 - \sin t)$ $\left[y' = \mathrm{cotg}\, t;\ y'' = \dfrac{1}{a\sin^3 t}\right]$

6.3 Geometrický význam derivace

Derivace funkce $y = f(x)$ v bodě a má geometrický význam *směrnice tečny* $k_{\mathrm{t}}(x)$ ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $A\,[a; f(a)]$ (viz obr. 6.1)

$$k_{\mathrm{t}}(x) = \mathrm{tg}\,\alpha = f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \tag{6.10}$$

Rovnice tečny ke křivce $y = f(x)$ v bodě $A\,[a; f(a)]$ má tvar

$$\boxed{y - f(a) = k_{\mathrm{t}}(x)\,(x-a) = f'(a)\,(x-a),} \tag{6.11}$$

kde $f'(a)$ je hodnota derivace y' v bodě $A\,[a; f(a)]$.

Je-li $f'(a) \neq 0$, *rovnice normály* ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $A\,[a; f(a)]$ je

$$y - f(a) = k_{\mathrm{n}}(x)\,(x-a), \tag{6.12}$$

kde směrnice normály

$$k_{\mathrm{n}}(x) = -\frac{1}{k_{\mathrm{t}}(x)}, \tag{6.13}$$

a tedy

$$\boxed{y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}\,(x-a).} \tag{6.14}$$

6.3.1. Jaký úhel svírá s osou x tečna ke křivce $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$, vedená bodem s x-ovou souřadnicí rovnou 1 (viz obr. 6.2)?

Řešení: Najdeme derivaci
$y' = \frac{10}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^2$, pro $x = 1$ je $y' = 3$, užitím vztahu (6.10) získáme
$\operatorname{tg}\alpha = 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg} 3 = 71°33'54''$.

6.3.2. Sestavte rovnici tečny a normály ke křivce
$x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ v bodě $M[1; -1]$ (viz obr. 6.2). Leží bod M na křivce?

Řešení: Danou rovnici derivujeme

$$2x + 2y^2 + 4xyy' + 12y^3y' = 0,$$
$$y' = -\frac{x+y^2}{2xy+6y^3}\,.$$

Bod M leží na křivce, tedy

$$y'_{\mathrm{M}} = -\frac{1+1}{-2-6} = \frac{1}{4}.$$

Ze vztahu (6.11) získáme rovnici tečny:

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x-1) \quad \text{neboli} \quad x - 4y - 5 = 0$$

a podle (6.14) rovnici normály:

$$y + 1 = -4(x-1) \quad \text{neboli} \quad 4x + y - 3 = 0.$$

6.3.3. Sestavte rovnice tečny a normály k daným křivkám v daném bodě:

a) $y = 4x^3 + 6x^2 - 10x + 1, \quad T[1; ?]$ $\left[y = 14x - 13;\ y = -\frac{1}{14}x + \frac{15}{14}\right]$

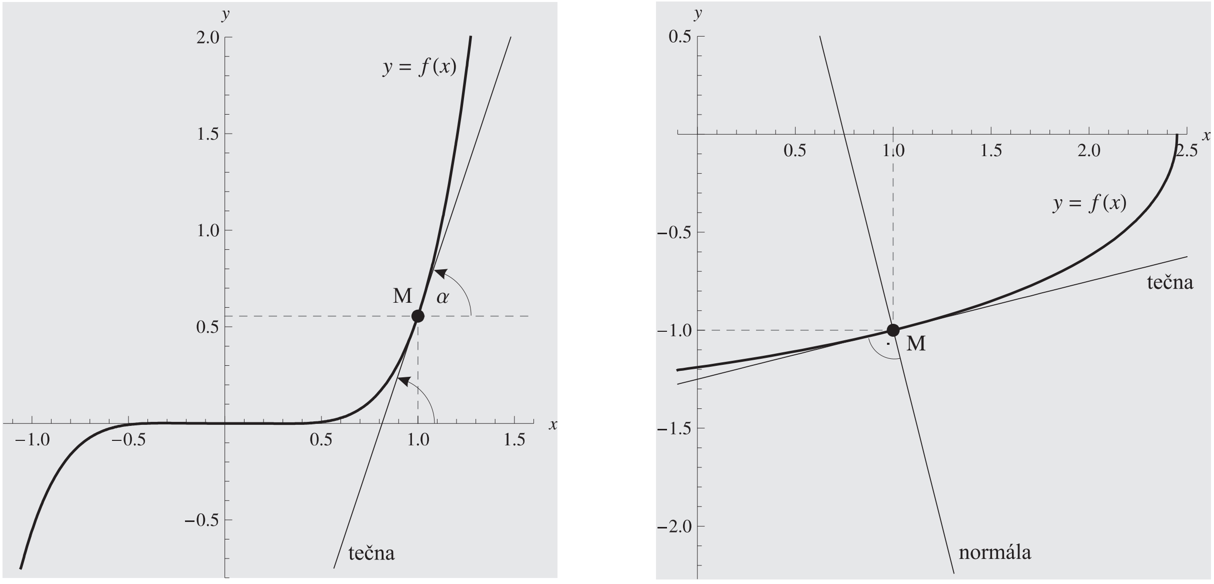
b) $y = 2x - \ln x, \quad T[1; ?]$ $[y = x + 1;\ y = -x + 3]$

c) $y = 2\sqrt{2}\sin x, \quad T\left[\frac{\pi}{4}; ?\right]$ $\left[2x - y + 2 - \frac{\pi}{2} = 0;\ x + 2y - 4 - \frac{\pi}{4} = 0\right]$

d) $y = \mathrm{e}^{-x}\cos 2x, \quad T[0; ?]$ $[x + y - 1 = 0;\ x - y + 1 = 0]$

e) $y = \mathrm{e}^{x}, \quad T[0; ?]$ $[y = x + 1;\ y = -x + 1]$

f) $xy + \ln y = 1, \quad T[1; 1]$ $[x + 2y - 3 = 0;\ 2x - y - 1 = 0]$



Obr. 6.2: K příkladům 6.3.1. a 6.3.2.

6.3.4. Najděte rovnice tečny a normály ke křivkám daným parametricky:

a) $x = 2t - t^2$

$y = 3t - t^3$ v bodě, kde $t = 0$ $[3x - 2y = 0;\ 2x + 3y = 0]$

b) $x = \sin t$

$y = \cos 2t$ v bodě, kde $t = \dfrac{\pi}{6}$ $[4x + 2y - 3 = 0;\ 2x - 4y + 1 = 0]$

c) $x = \sin t$

$y = a^t$ v bodě, kde $t = 0$ $\left[y = x \ln a + 1;\ y = -\dfrac{x}{\ln a} + 1\right]$

d) $x = \dfrac{3at}{1+t^2}$

$y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}$ v bodě, kde $t = 2$ $[4x + 3y - 12a = 0;\ 3x - 4y + 6a = 0]$

6.3.5. Jaký úhel s osou x svírá tečna k parabole $y = x^2 - 3x + 5$, vedená bodem $T[2; 3]$? Napište rovnici této tečny. $[\alpha = 45°,\ y = x + 1]$

6.3.6. Sestavte rovnici tečny ke křivce $y = x^3 + 3x^2 - 5$, která je kolmá k přímce $2x - 6y + 1 = 0$. $[3x + y + 6 = 0]$

6.3.7. Napište rovnici tečny ke kružnici $x^2 + y^2 = 25$ v bodě $T[3; y > 0]$. $[3x + 4y - 25 = 0]$

6.3.8. Na křivce $y = x^2(x - 2)^2$ najděte body, v nichž jsou tečny rovnoběžné s osou x. $[[0; 0],\ [1; 1],\ [2; 0]]$

6.3.9. Ve kterých bodech křivky $y = x^3 + x - 2$ jsou tečny k této křivce rovnoběžné s přímkou $y = 4x - 1$? $[[1; 0],\ [-1; -4]]$

6.4 Fyzikální význam derivace

Pohybuje-li se těleso přímočaře a je-li jeho vzdálenost x od jiného pevného bodu O v čase t dána vztahem

$$x = x(t), \tag{6.15}$$

pak jeho okamžitá *rychlost* v čase t je

$$\boxed{v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},} \tag{6.16}$$

a okamžité *zrychlení* v čase t je

$$\boxed{a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,.} \tag{6.17}$$

6.4.1. Závislost dráhy na čase přímočarého pohybu bodu je dána rovnicí $s = \frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{8}$ (t v sekundách, s v metrech). Určete rychlost pohybu na konci druhé sekundy.

Řešení: Najdeme derivaci dráhy podle času

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = t^4 + \frac{1}{4}\cos\frac{\pi t}{8},$$

$$\text{pro} \quad t = 2: \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 16 + \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} = 16.18.$$

Tedy $v = 16.18 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

6.4.2. Určete okamžitou rychlost v a zrychlení a hmotného bodu při kmitavém pohybu $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$.

Řešení:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y.$$

6.4.3. Po parabole $y = x(8-x)$ se pohybuje bod tak, že pro jeho polohu x v čase t platí $x = t\sqrt{t}$. Jaká je rychlost změny polohy y-ové souřadnice v bodě $M[1;7]$?

Řešení: Najdeme zákon změny polohy y-ové souřadnice tak, že do rovnice paraboly dosadíme $x = t\sqrt{t}$:

$$y = 8t\sqrt{t} - t^3.$$

Rychlost změny y je dána derivací y podle času

$$\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 12\sqrt{t} - 3t^2.$$

V bodě $M[1;7]$ bude $t = 1$, tedy $\dot{y}_{\mathrm{M}} = 9$, tj. rychlost změny polohy y-ové souřadnice je rovna $9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

6.4.4. Závislost dráhy na čase je dána rovnicí $s = t\ln(t+1)$. Najděte rychlost pohybu na konci druhé sekundy. $\left[v = 1.77 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\right]$

6.4.5. Přímočarý pohyb tělesa je určen rovnicí $s = 2t^3 - 15t^2 + 36t + 2$. Zjistěte, ve kterém čase je rychlost tělesa nulová. [2 s; 3 s]

6.4.6. Těleso bylo vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí $v_0 = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Za předpokladu, že tíhové zrychlení $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, vypočtěte:

a) okamžitou rychlost tělesa v čase 2 s, $\left[20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\right]$

b) dobu a výšku výstupu tělesa, [4 s; 80 m]

c) okamžité zrychlení v čase t. $\left[-10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}\right]$

Dráha svislého vrhu vzhůru je dána rovnicí $s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$.

6.4.7. Jak rychle se mění

a) objem V plynu v závislosti na tlaku p, řídí-li se plyn Boyleovým zákonem $pV = c$, kde c je konstanta? $\left[\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p} = -\dfrac{c}{p^2}\right]$

b) tlak plynu p v závislosti na objemu plynu V, platí-li $\left(p + \dfrac{a}{V^2}\right)(V - b) = c$, kde a, b, c jsou konstanty? $\left[\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = \dfrac{2a}{V^3} - \dfrac{c}{(V-b)^2}\right]$

6.4.8. Pro napětí nasycených vodních par je dán empirický vzorec $p = a \cdot b^{\frac{T}{c+T}}$, kde a, b, c jsou konstanty. Jak rychle se mění napětí v závislosti na teplotě? $\left[\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \dfrac{ac \ln b}{(c+T)^2}\, b^{\frac{T}{c+T}}\right]$

6.5 Diferenciál funkce

Geometrický význam diferenciálu funkce $y = f(x)$ je znázorněn na obr. 6.3. Přírůstek funkce $y = f(x)$ v bodě $A[a; f(a)]$ pro přírůstek argumentu $h = x - a$ je roven rozdílu y-ových souřadnic bodů $B[x, f(x)]$ a $A[a; f(a)]$. Tento rozdíl často označujeme jako *diferenci funkce* Δy (nebo $\Delta f(x)$), tedy

$$\Delta y = f(x) - f(a). \tag{6.18}$$

Sestrojme bodem A tečnu ke grafu funkce $f(x)$. *Diferenciál funkce* $y = f(x)$ v bodě A je pak rozdíl y-ové souřadnice bodu C na tečně a y-ové souřadnice bodu A na grafu funkce. Diferenciál funkce tedy vyjadřuje přírůstek pořadnice tečny ke křivce v uvažovaném bodě.

Má-li funkce $y = f(x)$ v bodě a derivaci, potom platí

$$\boxed{\Delta y \approx \mathrm{d}y \quad \text{neboli} \quad f(x) \approx f(a) + \mathrm{d}f(a).} \tag{6.19}$$

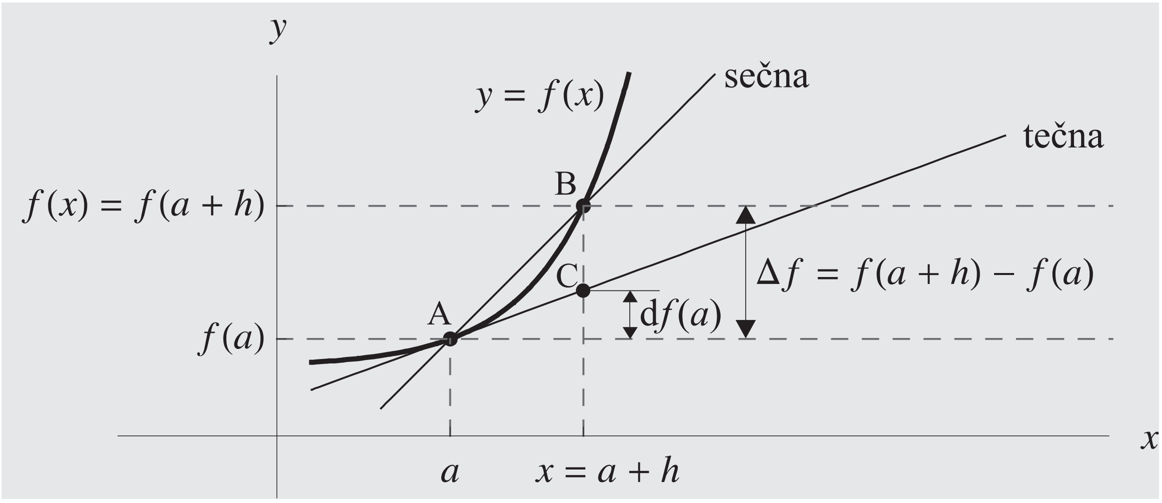
Tohoto vztahu se často používá k určení přibližné hodnoty výrazu a k odhadu chyby při přibližných výpočtech.

Diferenciál funkce $f(x)$ v bodě a je tedy roven součinu derivace funkce v bodě a a přírůstku argumentu Δx (resp. diferenciálu nezávisle proměnné $\mathrm{d}x$):

$$\boxed{\mathrm{d}f(a) = f'(a)(x - a) = f'(a)\,\Delta x = f'(a)\,\mathrm{d}x\,.} \tag{6.20}$$

6.5.1. Vypočtěte diferenci a diferenciál funkce $y = x^3 - x$ v bodě $x_0 = 2$ pro přírůstek $\Delta x = x - x_0$:

a) $\Delta x = 1$



Obr. 6.3: Diferenciál funkce v daném bodě.

b) $\Delta x = 0.1$
c) $\Delta x = 0.01$

Řešení:

a) $\Delta x = 1$

$$\Delta f = f(3) - f(2) = 27 - 3 - 8 + 2 = 18$$
$$\mathrm{d}f = f'(2) \cdot \Delta x = (3x^2 - 1)_{x=2} \cdot \Delta x = 11 \cdot 1 = 11$$

b) $\Delta x = 0.1$

$$\Delta f = f(2.1) - f(2) = 9.261 - 2.1 - 8 + 2 = 1.161$$
$$\mathrm{d}f = 11 \cdot 0.1 = 1.1$$

c) $\Delta x = 0.01$

$$\Delta f = f(2.01) - f(2) = 8.120601 - 2.01 - 8 + 2 = 0.110601$$
$$\mathrm{d}f = 11 \cdot 0.01 = 0.11$$

6.5.2. Určete diferenciál funkce $y = x^2 - x$ v bodě $x_0 = 10$, $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{10}$ a srovnejte jej s přírůstkem funkce Δy. [$\mathrm{d}y = 1.9$; $\Delta y = 1.91$]

6.5.3. Určete diferenciál funkce $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{49 - x^2} + \dfrac{49}{2} \arcsin \dfrac{x}{7}$ pro přírůstek $\mathrm{d}x$.

$$\left[\mathrm{d}y = \sqrt{49 - x^2}\,\mathrm{d}x\right]$$

6.5.4. Vypočtěte přibližně $\arcsin 0.51$.

Řešení:

$x_0 = 0.5, \quad \Delta x = 0.01,$

platí vztah

$$\arcsin(x_0 + \Delta x) \approx \arcsin x_0 + (\arcsin x)'_{x=x_0} \cdot \Delta x,$$

tedy

$$\arcsin 0.51 = \arcsin 0.5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0.5)^2}} \cdot 0.01 = \frac{\pi}{6} + 0.011 \approx 0.513.$$

6.5.5. Pomocí diferenciálu vyčíslete přibližně hodnotu:

a) $\sqrt[3]{7.94}$ [1.995]

b) $\sqrt{1.008}$ [1.004]

c) $\sin 29°$ [0.4849]

d) $\operatorname{arctg} 1.05$ [0.8104]

Diferenciálem n-tého řádu funkce $y = f(x)$ v bodě a je diferenciál diferenciálu řádu $(n-1)$ dané funkce:

$$\mathrm{d}^n f(a) = \mathrm{d}\left[\mathrm{d}^{n-1} f(a)\right], \tag{6.21}$$

a tedy

$$\boxed{\mathrm{d}^n f(a) = f^{(n)}(a)\,\mathrm{d}x^n, \quad \text{kde} \quad \mathrm{d}x^n = (\mathrm{d}x)^n.} \tag{6.22}$$

6.5.6. Najděte diferenciál druhého řádu dané funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 pro přírůstek Δx

a) $y = \sqrt{1-x^2}$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0.1$ $\left[\mathrm{d}^2 f(0) = -0.01\right]$

b) $y = x^x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.1$ $\left[\mathrm{d}^2 f(1) = 0.02\right]$

6.5.7. Najděte diferenciály uvedených řádů funkce $y = f(x)$ v bodě x pro přírůstek $\mathrm{d}x$, je-li:

a) $y = (x+1)^3(x-1)^2$, $\mathrm{d}^2 y$ $\left[\mathrm{d}^2 y = 4(x+1)(5x^2-2x-1)\mathrm{d}x^2\right]$

b) $y = \sin^2 x$, $\mathrm{d}^3 y$ $\left[\mathrm{d}^3 y = -4\sin 2x\,\mathrm{d}x^3\right]$

c) $y = x\cos 2x$, $\mathrm{d}^{10} y$ $\left[\mathrm{d}^{10} y = -1024(x\cos 2x + 5\sin 2x)\mathrm{d}x^{10}\right]$

6.6 L'Hospitalovo pravidlo

Nechť funkce $y = f(x)$ a $y = g(x)$ jsou diferencovatelné v okolí bodu x_0 a mají limity:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty, \tag{6.23}$$

tj. podíl $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ má v bodě x_0 tvar neurčitého výrazu $\dfrac{0}{0}$ nebo $\dfrac{\infty}{\infty}$, pak

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},} \tag{6.24}$$

existuje-li limita podílu derivací.

V případě neurčitých výrazů typu $0 \cdot \infty$ nebo $\infty - \infty$ upravíme algebraicky danou funkci tak, abychom získali neurčitý výraz typu $0/0$ nebo ∞/∞, a pak použijeme L'Hospitalovo pravidlo (6.24).

Jedná-li se o neurčité výrazy typu 0^0, ∞^0, 1^∞, danou funkci zlogaritmujeme, najdeme limitu jejího logaritmu a potom limitu původní funkce (viz řešené příklady).

6.6.1. Najděte $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1+\ln x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}}$.

Řešení: Daná limita je typu $\dfrac{0}{0}$. Použijeme přímo L'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1+\ln x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(x^2-1+\ln x\right)'}{\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}\right)'} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+\frac{1}{x}}{\mathrm{e}^x} = \frac{3}{\mathrm{e}}$$

6.6.2. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Řešení: Jedná se o neurčitý výraz typu $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6},$$

neboť $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. V tomto případě jsme použili L'Hospitalovo pravidlo dvakrát.

6.6.3. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ $[1]$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$ $\left[\dfrac{3}{5}\right]$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\ln(1+x)}$ $[2]$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}-1}$ $\left[\dfrac{2}{3}\right]$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$ $\left[\dfrac{1}{3}\right]$

6.6.4. Najděte $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{x+\mathrm{e}^x}$.

Řešení: Neurčitý výraz typu $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{x+\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(1+\frac{x}{2})}{1+\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(2+\frac{x}{2})}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{x}{2}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} = 0$$

6.6.5. a) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2^x-1}{x}$ $[\infty]$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$ $[0]$

c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\ln(x-a)}{\ln\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^a\right)}$ $[1]$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x^n} \quad (n>0)$ $[0]$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$ [1]

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x} \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$ [0]

6.6.6. Určete $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 \ln x)$.

Řešení: Neurčitý výraz typu $0 \cdot \infty$. Součin funkcí upravíme na podíl typu $\dfrac{\infty}{\infty}$, pak použijeme L'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to 0}(x^2 \ln x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

6.6.7. a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \arcsin x \operatorname{cotg} x$ [1]

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ [1]

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{cotg}^2 x\,(1-\cos x)$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1-\cos x) \operatorname{cotg} x$ [0]

e) $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin \dfrac{a}{x}$ [a]

f) $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln x \log(1-x)$ [0]

6.6.8. Najděte $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$.

Řešení: Neurčitý výraz typu $\infty - \infty$. Dané zlomky sečteme, dostaneme neurčitý výraz typu $\dfrac{0}{0}$, potom použijeme (dvakrát) L'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x\,(\mathrm{e}^x - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - 1 + x\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(2+x)} = \frac{1}{2}$$

6.6.9. a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$ $\left[-\dfrac{1}{2}\right]$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{x}\right)$ [0]

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2\ln x} - \dfrac{1}{x^2-1}\right)$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

6.6.10. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

Řešení: Jedná se o neurčitý výraz typu 0^0, který spolu s dalšími mocninnými typy řešíme pomocí logaritmizace:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{\,g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)} \tag{6.25}$$

Označíme danou funkci y, tj. $y = (\sin x)^x$, a zlogaritmujeme ji:

$$\ln y = x \ln \sin x = \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}}.$$

Vyčíslíme limitu logaritmu dané funkce použitím L'Hospitalova pravidla (je zde neurčitý výraz typu ∞/∞):

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos x}{\sin x} = -\lim_{x\to 0}\left(x\cos x\,\frac{x}{\sin x}\right) = 0.$$

Tedy $\lim\limits_{x\to 0} y = \mathrm{e}^0 = 1$.

6.6.11. a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{m}x)^{\frac{1}{x}}$ $[\mathrm{e}^{\mathrm{m}}]$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x}$ [1]

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$ [1]

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\ln x}$ [1]

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\pi-2x)^{\cos x}$ [1]

f) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$ $\left[\mathrm{e}^{-6}\right]$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$ [1]

6.7 Taylorův rozvoj

Nechť má funkce $f(x)$ v okolí $\mathcal{O}$ bodu x_0 všechny derivace až do řádu $n+1$ včetně, pak pro každé $x\in\mathcal{O}$ platí *Taylorova formule*:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_{(n+1)}(x), \quad (6.26)}$$

kde $R_{(n+1)}(x)$ označuje Taylorův zbytek.

Pomocí zbytku $R_{(n+1)}(x)$ odhadujeme přesnost, s jakou Taylorův polynom n-tého stupně

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \tag{6.27}$$

aproximuje funkci $y=f(x)$ v okolí bodu x_0

$$f(x) = T_n(x) + R_{(n+1)}(x). \tag{6.28}$$

Je-li v Taylorově formuli (6.26) $x_0=0$, nazývá se příslušná formule *Maclaurinovou* a má tvar

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_{(n+1)}(x). \quad (6.29)}$$

6.7.1. Nahraďte funkci $f(x)=\sqrt[3]{x}$ v okolí bodu $x_0=1$ Taylorovým polynomem 5. stupně.

Řešení: Vyčíslíme hodnoty funkce $f(x) = x^{1/3}$ a jejich derivací do 5. řádu včetně pro $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
f(1) &= 1 \qquad & f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-2/3} \qquad & f'(1) &= \frac{1}{3} \\
& & f''(x) &= -\frac{2}{9}x^{-5/3} & f''(1) &= -\frac{2}{9} \\
& & f'''(x) &= \frac{10}{27}x^{-8/3} & f'''(1) &= \frac{10}{27} \\
& & f^{(4)}(x) &= -\frac{80}{81}x^{-11/3} & f^{(4)}(1) &= -\frac{80}{81} \\
& & f^{(5)}(x) &= \frac{880}{243}x^{-14/3} & f^{(5)}(1) &= \frac{880}{243}
\end{aligned}$$

Podle Taylorovy věty (6.26) dostaneme

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{x} = {} & 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{10}{27 \cdot 3!}(x-1)^3 - \\
& - \frac{80}{81 \cdot 4!}(x-1)^4 + \frac{880}{243 \cdot 5!}(x-1)^5 + R
\end{aligned}$$

6.7.2. Napište rozvoj polynomu $P(x)$ podle mocnin $(x - x_0)$:

a) $P(x) = x^3 + x - 4$, je-li $x_0 = 2$

$\left[6 + 13(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3\right]$

b) $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$, je-li $x_0 = -1$

$\left[5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+3)^3\right]$

c) $P(x) = 4 - 3x + x^2 - 5x^3 + x^4$, je-li $x_0 = 4$

$\left[-56 + 21(x-4) + 37(x-4)^2 + 11(x-4)^3 + (x-4)^4\right]$

6.7.3. Sestavte pro danou funkci Taylorův polynom n-tého řádu v okolí bodu x_0:

a) $y = \dfrac{x}{x-1}$, $x_0 = 2$, $n = 3$ $\quad\left[2 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3\right]$

b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$, $n = 3$ $\quad\left[1 - \dfrac{1}{2}(x-1) + \dfrac{3}{8}(x-1)^2 - \dfrac{5}{16}(x-1)^3\right]$

c) $y = x^x$, $x_0 = 1$, $n = 3$ $\quad\left[1 + (x-1) + (x-1)^2 + \dfrac{1}{2}(x-1)^3\right]$

d) $y = x^x - 1$, $x_0 = 1$, $n = 3$ $\quad\left[(x-1) + (x-1)^2 + \dfrac{1}{2}(x-1)^3\right]$

6.7.4. Sestavte Taylorův polynom 2. řádu v okolí bodu $x_0 = 2$ polynomu:
$P(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 3$
a vyčíslete jeho hodnotu v bodech 2.02 a 1.97.

$[321 + 1087(x-2) + 1648(x-2)^2;\ P(2.02) \doteq 343.4;\ P(1.97) \doteq 289.9]$

6.7.5. Sestavte Maclaurinův polynom 3. stupně funkce $y = a^x$ $(a > 0)$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a^x \qquad & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= a^x \ln a & f'(0) &= \ln a \\
f''(x) &= a^x \ln^2 a & f''(0) &= \ln^2 a \\
f'''(x) &= a^x \ln^3 a & f'''(0) &= \ln^3 a
\end{aligned}$$

Podle Maclaurinova vzorce (6.29) dostáváme

$$a^x = 1 + x\ln a + \frac{x^2\ln^2 a}{2!} + \frac{x^3\ln^3 a}{3!} + R$$

6.7.6. Vyjádřete danou funkci Maclaurinovým polynomem:

a) $y = \mathrm{e}^x$ $\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right]$

b) $y = x\mathrm{e}^x$ $\left[x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{(n-1)!}\right]$

c) $y = \sin x$ $\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right]$

d) $y = \cos x$ $\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$

6.7.7. Sestavte pro danou funkci Maclaurinův polynom n-tého řádu:

a) $y = \mathrm{e}^{2x-x^2}, \quad n = 5$ $\left[1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5\right]$

b) $y = \ln\cos x, \quad n = 4$ $\left[-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4\right]$

6.8 Monotónnost funkce

Nechť funkce $y = f(x)$ je spojitá na intervalu I a nechť uvnitř tohoto intervalu existuje první derivace $f'(x)$. Platí-li pro každé x z intervalu I $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$, $f'(x) \geq 0$, $f'(x) \leq 0$), je funkce $f(x)$ na intervalu I rostoucí (klesající, neklesající, nerostoucí).

Platí-li pro každé x z intervalu I $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), přičemž rovnost platí jen pro konečný počet bodů tohoto intervalu, pak je funkce $f(x)$ na intervalu I rostoucí (klesající).

6.8.1. Je dána funkce $y = x^3 - 3x^2$ a body $x = 3$, $x = 1$, $x = -1$, $x = 0.5$. Ve kterém z daných bodů funkce roste, klesá?

Řešení: Najdeme derivaci $y' = 3x^2 - 6x$.

Pro	$x = 3$	$y' = 9 > 0$	funkce roste
	$x = 1$	$y' = -3 < 0$	funkce klesá
	$x = -1$	$y' = 9 > 0$	funkce roste
	$x = 0.5$	$y' = -2.25 < 0$	funkce klesá

6.8.2. Najděte intervaly monotonnosti funkce $y = x^5 - 15x^3 + 3$.

Řešení: Daná funkce má v každém bodě derivaci $y' = 5x^4 - 45x^2$. Zjistíme intervaly, ve kterých je:

a) $f'(x) > 0$; b) $f'(x) < 0$.

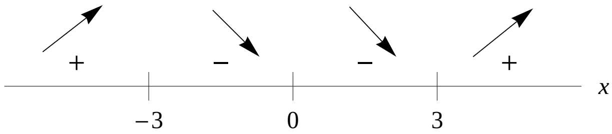
Máme: $5x^4 - 45x^2 = 0$

$5x^2(x^2 - 9) = 0$

$5x^2(x+3)(x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2,3} = 0; \pm 3$

Nulové body derivace ($x = 0; \pm 3$) vyneseme na číselnou osu a zjistíme znaménko derivace v každém ze čtyř intervalů, na které se rozdělila číselná osa, a to tak, že dosadíme libovolné číslo z intervalu do derivace.

Pro $x < -3$	zvolíme např.	$x = -4$,	dostaneme:	$y' > 0$
$-3 < x < 0$		$x = -1$		$y' < 0$
$0 < x < 3$		$x = 2$		$y' < 0$
$x > 3$		$x = 5$		$y' > 0$



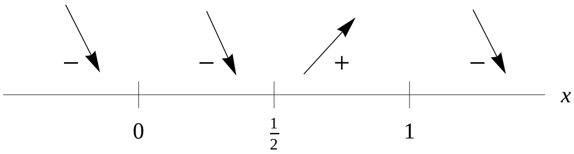
Daná funkce je na intervalech $(-\infty, -3) \cup (3; \infty)$ rostoucí a na intervalu $(-3, 3)$ klesající.

6.8.3. Najděte intervaly monotónnosti funkce $y = \dfrac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$.

Řešení:

$$y' = \frac{-10(12x^2 - 18x + 6)}{(4x^3 - 9x^2 + 6x)^2} = \frac{-60(2x^2 - 3x + 1)}{(4x^3 - 9x^2 + 6x)^2} = -60\frac{2(x-1)(x-\frac{1}{2})}{x^2(4x^2 - 9x + 6)^2}\ .$$

Na číselnou osu vyneseme nulové body první derivace ($x = 1;\ 1/2$) a body, v nichž není derivace definována ($x = 0$):



Funkce roste na intervalu $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ a klesá v intervalech $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; \infty)$.

6.8.4. Určete intervaly monotónnosti daných funkcí:

a) $y = 2x^3 - 3x^2$ $\quad [\nearrow: (-\infty; 0), (1; \infty); \searrow: (0; 1)]$

b) $y = x + \dfrac{1}{x}$ $\quad [\nearrow: (-\infty; -1), (1; \infty); \searrow: (-1; 0), (0; 1)]$

c) $y = x^3 - x$ $\quad \left[\nearrow: \left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \infty\right); \searrow: \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$

d) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ $\quad [\nearrow: (-1; 1)\,; \searrow: (-\infty; -1)\,, (1; \infty)]$

e) $y = \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{1 - x}$ $\quad \left[\nearrow: \left(\dfrac{2}{3}; 1\right), (1; 2)\,; \searrow: (-\infty; 0)\,, \left(0; \dfrac{2}{3}\right), (2; \infty)\right]$

f) $y = x + \dfrac{x}{x^2 - 1}$ $\quad \left[\nearrow: \left(-\infty; -\sqrt{3}\right), \left(\sqrt{3}; \infty\right); \searrow: \left(-\sqrt{3}; -1\right), (-1; 1)\,, \left(1; \sqrt{3}\right)\right]$

g) $y = \dfrac{(x - 1)^3}{(x + 1)^2}$ $\quad [\nearrow: (-\infty; -5)\,, (-1; \infty)\,; \searrow: (-5; -1)]$

6.8.5. a) $y = x - \mathrm{e}^x$ $\quad [\nearrow: (-\infty; 0)\,; \searrow: (0; \infty)]$

b) $y = x^2 \mathrm{e}^{-x}$ $\qquad [\nearrow\colon (0;2)\,;\searrow\colon (-\infty;0)\,,(2;\infty)]$

c) $y = 2x^2 - \ln x$ $\qquad \left[\nearrow\colon \left(\frac{1}{2};\infty\right);\searrow\colon \left(0;\frac{1}{2}\right)\right]$

6.8.6. a) $y = \frac{1}{2}x - \sin x$, je-li: $0 \le x \le 2\pi$ $\qquad \left[\nearrow\colon \left(\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right);\searrow\colon \left(0;\frac{\pi}{3}\right),\left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right)\right]$

b) $y = x + \cos x$ $\qquad [\nearrow\colon (-\infty;\infty)]$

c) $y = x - 2\sin x$, je-li: $0 \le x \le 2\pi$ $\qquad \left[\nearrow\colon \left(\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right);\searrow\colon \left(0;\frac{\pi}{3}\right),\left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right)\right]$

6.9 Extrémní hodnoty funkcí

Funkce $f(x)$ může nabýt extrémní hodnoty jen v bodech x_{k}, v nichž je $f'(x_{\mathrm{k}}) = 0$ nebo v nichž $f(x)$ nemá (oboustrannou) derivaci. Body x_{k}, v nichž je $f'(x_{\mathrm{k}}) = 0$, se nazývají *stacionární body* funkce $f(x)$.

Postačující podmínky pro extrém:

1. Nechť x_0 je stacionární bod funkce $f(x)$, příp. bod, v němž neexistuje derivace $f(x)$, pak funkce $f(x)$ nabývá v bodě x_0 ostré lokální

   a) maximum, je-li $(x - x_0)\, f'(x) < 0$

   b) minimum, je-li $(x - x_0)\, f'(x) > 0$

   pro všechna $x \ne x_0$ ležící ve vhodném okolí x_0.

2. Nechť $f(x)$ má první i druhou derivaci v bodě x_0, přičemž $f'(x_0) = 0$, pak $f(x)$ má v bodě x_0 ostré lokální

   a) maximum, je-li $f''(x_0) < 0$,

   b) minimum, je-li $f''(x_0) > 0$.

   Je-li však $f''(x_0) = 0$, může, ale nemusí být v bodě x_0 lokální extrém dané funkce.

3. Nechť $f(x)$ má v okolí bodu x_0 spojitou derivaci řádu $m \ge 3$, přičemž

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0,$$

$$f^{(m)}(x_0) \ne 0,$$

   pak v bodě x_0

   - nenastane extrém, je-li m liché číslo;
   - nastane extrém, je-li m sudé číslo, a to ostré lokální

     a) maximum, je-li $f^{(m)}(x_0) < 0$,

     b) minimum, je-li $f^{(m)}(x_0) > 0$.

Globální (absolutní) extrémy spojité funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a;b\rangle$ hledáme tak, že najdeme hodnoty funkce ve stacionárních bodech, v bodech, v nichž funkce nemá derivaci, a v krajních bodech intervalu, z nich pak vybereme největší (globální maximum) a nejmenší (globální minimum) hodnotu.

6.9.1. Určete lokální extrém funkce $y = (x-5)\,\mathrm{e}^x$.

Řešení: Najdeme $y' = (x-4)\,\mathrm{e}^x$. Stacionární body jsou řešení rovnice

$$(x-4)\,\mathrm{e}^x = 0,$$

tedy $x = 4$. Druhá derivace $y'' = (x-3)\,\mathrm{e}^x$. Vyčíslíme hodnotu druhé derivace ve stacionárním bodě: $y''(4) = \mathrm{e}^4 > 0$, daná funkce má v bodě $x = 4$ lokální minimum, $y_{\min} = -\mathrm{e}^4$.

6.9.2. Určete lokální extrém funkce $y = x\sqrt{1-x^2}$.

Řešení: Funkce je definována pro $-1 \le x \le 1$.

První derivace: $y' = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$, $y' = 0$ pro $x_{1,2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; y' neexistuje pro $x = \pm 1$.

Druhá derivace $y'' = \dfrac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)^{3/2}}$.

Vyčíslíme hodnotu druhé derivace ve stacionárních bodech:

$$y''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1(1-3)}{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3/2}} < 0,$$

v bodě $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ bude tedy lokální maximum, $y_{\max} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$.

$$y''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1-3}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3/2}} > 0,$$

tedy v bodě $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ bude lokální minimum, $y_{\min} = -\dfrac{1}{2}$.

V bodech $x = \pm 1$ extrémy neexistují, neboť lokálními extrémy mohou být pouze vnitřní body definičního oboru.

6.9.3. Najděte lokální extrémy daných funkcí:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 1$ $\qquad$ [max: $[-2; 45]$, min: $[3; -80]$]

b) $y = \sqrt[3]{x^2}$ $\qquad$ [$\nexists$]

c) $y = x + \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ [max: $[-1; -2]$, min: $[1; 2]$]

d) $y = x^3 - 12x + 1$ $\qquad$ [max: $[-2; 17]$, min: $[2; -15]$]

e) $y = 4x^3 - 18x^2 + 27x - 7$ $\qquad$ [$\nexists$]

f) $y = x - \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ [$\nexists$]

g) $y = x + \dfrac{2x}{1+x^2}$ $\qquad$ [$\nexists$]

6.9.4. a) $y = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ $\qquad$ $\left[\text{max: } \left[1; \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right], \text{ min: } \left[-1; -\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right]\right]$

b) $y = x^2\mathrm{e}^{-x}$ $\qquad$ $\left[\text{max: } \left[2; \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}\right], \text{ min: } [0; 0]\right]$

c) $y = \sin x - x + \dfrac{x^3}{3}$ $\qquad$ [$\nexists$]

6.9.5. Najděte globální extrémy funkce $y = 3x - x^3$ na intervalu $\langle -2; 3\rangle$. Funkce je v tomto intervalu spojitá a má všude derivaci.

Řešení: $y' = 3 - 3x^2$; stacionární body: $x = \pm 1$. Hodnoty funkce v těchto bodech jsou $y(1) = 2$, $y(-1) = -2$. Vyčíslíme hodnoty funkce v krajních bodech intervalu: $y(-2) = 2$, $y(3) = -18$. Vybereme největší a nejmenší z těchto hodnot. Tedy globální maximum je v bodech $x = 1$ a $x = -2$ a má hodnotu $y = 2$, globální minimum -18 má funkce v bodě $x = 3$.

6.9.6. Určete globální extrémy funkcí na daném intervalu:

a) $y = x^2 - 6x + 10, \quad x \in \langle -1; 5\rangle$ $\quad [\max\colon [-1; 17]\,,\ \min\colon [3; 1]]$

b) $y = x + \dfrac{1}{x-1}, \quad x \in \langle -4; 0\rangle$ $\quad [\max\colon [0; -1]\,,\ \min\colon \nexists]$

c) $y = 2^x, \quad x \in \langle -1; 5\rangle$ $\quad [\max\colon [5; 32]\,,\ \min\colon [-1; 1/2]]$

d) $y = \cos 2x - 2x, \quad x \in \left\langle -\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right\rangle$ $\quad \left[\max\colon \left[-\dfrac{\pi}{2}; -1 + \pi\right],\ \min\colon \left[\dfrac{\pi}{2}; -1 - \pi\right]\right]$

6.9.7. Do koule o poloměru R vepište válec tak, aby měl co největší plášť.

Řešení: Nechť poloměr základny válce je r. Pak výška válce h je dána vztahem

$$h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

a plášť

$$S = 2\pi r \cdot 2\sqrt{R^2 - r^2}\,,$$

přičemž $0 \le r \le R$. Odtud

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 4\pi\left(\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right) = 4\pi\frac{R^2 - 2r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}},$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 0 \qquad \text{pro} \qquad R^2 - 2r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Funkce $S(r)$ je nezáporná a spojitá na $\langle 0; R\rangle$. V krajních bodech intervalu je rovna nule. Tedy uvnitř intervalu pro $r = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ má $S(r)$ největší hodnotu.

$$S_{\max} = 2\pi R\,\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = 2\pi R^2\,.$$

6.9.8. Číslo 28 rozložte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl největší. $[14; 14]$

6.9.9. Najděte takové kladné číslo, aby součet tohoto čísla a jeho převrácené hodnoty byl nejmenší. [1]

6.9.10. Určete rozměry válcové nádoby s víkem tak, aby při objemu 2 litry měla tato nádoba minimální povrch. $\left[R = \sqrt[3]{\tfrac{1}{\pi}}\ \mathrm{dm} \doteq 6.8\ \mathrm{cm};\ h = \sqrt[3]{\tfrac{8}{\pi}}\ \mathrm{dm} \doteq 13.7\ \mathrm{cm}\right]$

6.9.11. Určete rozměry obdélníku tak, aby

a) při daném obsahu 16 cm^2 měl minimální obvod. $[a = b = 4\ \mathrm{cm}]$

b) při daném obvodu 20 cm měl maximální obsah. $[a = b = 5\ \mathrm{cm}]$

6.9.12. Určete rozměry válce o největším objemu, jestliže jeho povrch je roven 6π dm^2.

$[R = 1; h = 2]$

6.9.13. Celkový objem nádrže tvaru kvádru se čtvercovou podstavou je 1 m^3. Jaké rozměry musí mít nádrž (délka strany podstavy a a hloubka h), aby její povrch byl minimální?

$\left[a = 2^{\frac{1}{3}}\ \mathrm{m}; h = 2^{-\frac{2}{3}}\ \mathrm{m}\right]$

6.10 Konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body

Graf funkce $f(x)$ se nazývá konvexní (konkávní) na intervalu $(a; b)$, leží-li nad (pod) tečnou, vedenou libovolným bodem tohoto intervalu.

- Je-li $f''(x) > 0$ na intervalu $(a; b)$, pak je funkce *konvexní* v tomto intervalu.
- Je-li $f''(x) < 0$ na intervalu $(a; b)$, pak je funkce *konkávní* v tomto intervalu.

Bod x_0, v němž je $f''(x_0) = 0$ (případně $f''(x_0)$ sice neexistuje, avšak $f'(x)$ je v něm spojitá), se nazývá *inflexní bod*.

6.10.1. Najděte inflexní body a intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce: $y = (x+1)^2(x-2)$.

Řešení: Najdeme první a druhou derivaci funkce: $y' = 3(x^2 - 1)$, $y'' = 6x$,
$y'' = 0$ pro $x = 0$. Inflexní bod má souřadnice $[0; -2]$.
$y'' > 0$ pro $x > 0$, $y'' < 0$ pro $x < 0$. Funkce je tedy konvexní na intervalu $(0; \infty)$ a konkávní na intervalu $(-\infty; 0)$.

6.10.2. Najděte inflexní body křivky: $y = (x-5)^{\frac{5}{3}} + 2$.

Řešení: $y' = \dfrac{5}{3}(x-5)^{\frac{2}{3}}$, $y'' = \dfrac{10}{9\sqrt[3]{x-5}}$

Druhá derivace se nerovná nule pro žádné x a neexistuje v bodě $x = 5$. V bodě $x = 5$ mění y'' znaménko ze záporného na kladné, proto nastává v tomto bodě inflexe. Tedy bod $I[5; 2]$ je inflexní bod.

6.10.3. Najděte inflexní body I a intervaly konvexnosti ($\cup$) a konkávnosti ($\cap$) daných funkcí:

a) $y = x + \dfrac{1}{x}$ $\quad[\mathrm{I} : \nexists,\ \cup : (0; \infty),\ \cap : (-\infty; 0)]$

b) $y = (x-4)^5 + 4x + 4$ $\quad[\mathrm{I} : [4; 20],\ \cup : (4; \infty),\ \cap : (-\infty; 4)]$

c) $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$ $\quad[\mathrm{I} : \nexists,\ \cup : (-\infty; \infty)]$

d) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$ $\quad[\mathrm{I} : [1; 2],\ \cup : (1; \infty),\ \cap : (-\infty; 1)]$

e) $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2$

$[\mathrm{I}_1 : [-2; -4], \mathrm{I}_2 : [1; -12],\ \cup : (-\infty; -2), (1; \infty),\ \cap : (-2; 1)]$

f) $y = x + \dfrac{1}{x^2}$ $\quad[\mathrm{I} : \nexists,\ \cup : (-\infty; 0), (0; \infty)]$

g) $y = x + \dfrac{2x}{1-x^2}$ $\quad[\mathrm{I} : [0; 0],\ \cup : (0; 1), (1; \infty),\ \cap : (-\infty; -1), (-1; 0)]$

h) $y = x + \sqrt[3]{x^5}$ $\quad[\mathrm{I} : [0; 0],\ \cup : (0; \infty),\ \cap : (-\infty; 0)]$

6.10.4. a) $y = x\mathrm{e}^x$ $\quad\left[\mathrm{I} : \left[-2; -2\mathrm{e}^{-2}\right],\ \cup : (-2; \infty),\ \cap : (-\infty; -2)\right]$

b) $y = \dfrac{1}{8}x^2 + \ln x$ $\quad\left[\mathrm{I} : \left[2; \dfrac{1}{2} + \ln 2\right],\ \cup : (2; \infty),\ \cap : (0; 2)\right]$

c) $y = x \ln x$ $\quad[\cup : (0; \infty)]$

d) $y = x^x$ $\quad[\cup : (0; \infty)]$

6.11 Asymptoty grafu funkce

Přímku o rovnici $x = a$ nazýváme *asymptotou bez směrnice* grafu funkce $f(x)$, má-li funkce v bodě a nevlastní limitu (nebo jednostranné nevlastní limity).

Přímku o rovnici $y = kx + q$ nazýváme *asymptotou se směrnicí* grafu funkce $f(x)$, platí-li

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0. \tag{6.30}$$

Existují-li současně limity

$$\boxed{k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx]\,,} \tag{6.31}$$

nebo

$$\boxed{k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad q = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx]\,,} \tag{6.32}$$

pak přímka $y = kx + q$ je asymptotou se směrnicí grafu funkce $f(x)$.

6.11.1. Najděte asymptoty grafu funkce $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

Řešení: Pro $x = -2$ je $y \to \infty$. Tedy asymptota bez směrnice je $x = -2$.
Užitím vztahů (6.31) a (6.32) hledáme asymptoty se směrnicí:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x + 2)} = 1,$$

$$q = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - x\right) = -4.$$

Limity pro $x \to -\infty$ jsou stejné. Existuje tedy pouze jediná asymptota se směrnicí grafu dané funkce a má rovnici $y = x - 4$.

6.11.2. Najděte rovnice asymptot grafu dané funkce:

a) $y = x + \dfrac{2x}{x^2 - 1}$ $\quad [x = 1;\ x = -1;\ y = x]$

b) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ $\quad [y = x;\ y = -x]$

c) $y = \dfrac{x^2 + 5}{x^2 - 1} + 2x$ $\quad [x = 1;\ x = -1;\ y = 2x + 1]$

d) $y = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$ $\quad [x = 1;\ y = 2]$

e) $y = 3x + \dfrac{3}{x - 2}$ $\quad [x = 2;\ y = 3x]$

f) $y = \dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x - 1}$ $\quad [x = 0;\ x = -1;\ x = 1;\ y = 0]$

6.11.3. a) $y = \dfrac{\sin x}{x}$ $\quad [y = 0]$

b) $y = 2x - \dfrac{\cos x}{x}$ $\quad [y = 2x;\ x = 0]$

c) $y = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ $\quad [x = 0;\ y = x + 1]$

d) $y = \dfrac{\ln x}{x}$ $\quad [x = 0;\ y = 0]$

e) $y = \dfrac{\ln^2 x}{x} - 3x$ $\quad [y = -3x;\ x = 0]$

derivace $f'(a)$	**druhá derivace** $f''(a)$	**funkce v bodě** a
$f'(a) > 0$	$f''(a) > 0$	rostoucí, konvexní
	$f''(a) < 0$	rostoucí, konkávní
$f'(a) < 0$	$f''(a) > 0$	klesající, konvexní
	$f''(a) < 0$	klesající, konkávní
$f'(a) = 0$	$f''(a) > 0$	lokální minimum
$f'(a) = 0$	$f''(a) < 0$	lokální maximum
$f'(a) = 0$	$f''(a) = 0$	možnost inflexního bodu
$f'(a) \neq 0$	$f''(a) = 0$	inflexní bod

Tabulka 6.1: K vyšetřování průběhu funkce

6.12 Průběh funkce

Při určování průběhu funkce zjišťujeme:

1. definiční obor funkce,
2. sudost, lichost, periodičnost funkce,
3. body nespojitosti funkce, jednostranné limity v nich a intervaly spojitosti,
4. nulové body funkce, průsečíky s osami,
5. intervaly monotónnosti funkce,
6. lokální extrémy funkce,
7. intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce,
8. inflexní body funkce,
9. asymptoty grafu funkce,
10. další významné body (např. body, v nichž derivace funkce není definována, spojitá apod.).

Pomocí výše uvedených bodů sestrojíme graf dané funkce.

6.12.1. Určete průběh funkce $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2$.

Řešení:

1. Definiční obor funkce jsou všechna $x \neq 0$, tedy $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.
2. Pro $x \in D_f$ je $f(x) \neq f(-x)$ a $f(-x) \neq -f(x)$, tedy funkce $f(x)$ není ani sudá ani lichá. Neplatí ani $f(x + l) = f(x)$, je-li $l \neq 0 \;\Rightarrow$ funkce $f(x)$ není periodická.

3. Funkce $f(x)$ je spojitá pro každé $x \in D_f$. Je nespojitá v $x = 0$. Pro limity v tomto bodě platí

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}+4x^2\right) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+4x^2\right) = +\infty.$$

4. Nulové body funkce $f(x)$ najdeme řešením rovnice $\frac{1}{x}+4x^2 = 0$:
$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$. Průsečík s osou x je tedy v bodě $\left[-\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}; 0\right]$. Průsečík s osou y neexistuje, neboť platí, že $x \neq 0$.
5. Najdeme první derivaci $y' = \frac{8x^3-1}{x^2}$;
$y' = 0$ pro $x = \frac{1}{2}$ a není definována pro $x = 0$; $y' > 0$ pro $x > \frac{1}{2}$ a $y' < 0$ pro $x < \frac{1}{2}$.
Funkce klesá v $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right)$, roste v $\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$.
6. První derivace mění znaménko v bodě $x = \frac{1}{2}$ a to ze záporného na kladné, v tomto bodě je tedy lokální minimum funkce (druhá derivace v tomto bodě je kladná), $y_{\min} = 3$.
7. Určíme druhou derivaci $y'' = 8 + \frac{2}{x^3}$;
$y'' = 0$ pro $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$ a není definována pro $x = 0$;
$y'' > 0$ pro $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\right) \cup (0; \infty)$, $f(x)$ je v tomto intervalu konvexní;
$y'' < 0$ pro $x \in \left(-\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}; 0\right)$, $f(x)$ je v tomto intervalu konkávní.
8. Inflexní bod ($y'' = 0$) je $\left[-\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}; 0\right]$.
9. Asymptoty
   a) bez směrnice: $x = 0$
   b) se směrnicí: neexistují.

Získané údaje shrneme do tabulky (použijeme těchto označení: $\nearrow$ – křivka roste, $\searrow$ – křivka klesá, MIN – lokální minimum, MAX – lokální maximum, $\cup$ – konvexní oblouk, $\cap$ – konkávní oblouk, I.B. – inflexní bod) a sestrojíme graf dané funkce (viz obr. 6.4).

Intervaly a body	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\right)$	$-\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$	$\left(-\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}; 0\right)$	0	$\left(0; \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$-12/\sqrt[3]{4}$	$-$	nedef.	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	nedef.	$+$	24	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	nedef.	$\searrow$	3	$\nearrow$
	$\cup$	I.B.	$\cap$	asymp. bez sm.	$\cup$	MIN	$\cup$

6.12.2. Vyšetřete průběh funkce $y = \dfrac{\sin^2 x}{2 + \sin x}$.

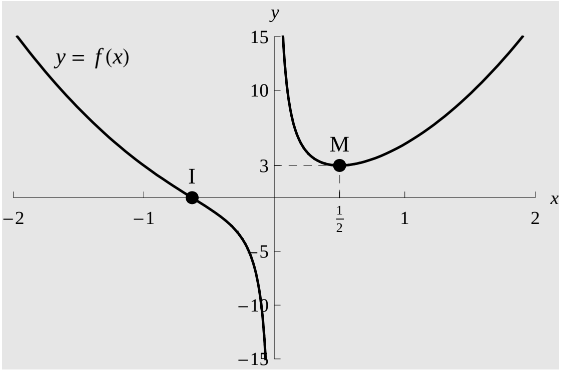
Řešení:

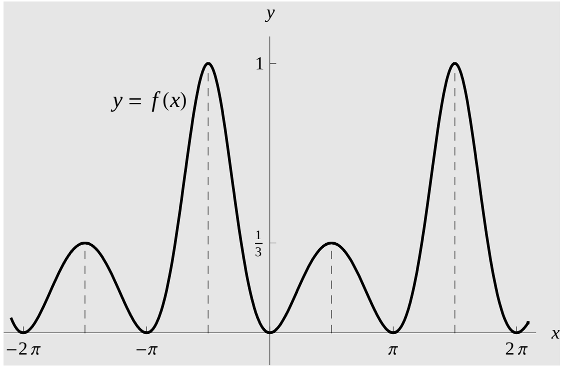
1. Funkce je definovaná pro všechna x, neboť vždy platí $2 + \sin x \neq 0$, tedy $D_f = (-\infty; \infty)$.
2. Pro $x \in D_f$ je $f(x) \neq f(-x)$ a $f(-x) \neq -f(x)$, tedy funkce není ani sudá, ani lichá. $f(x + 2\pi) = f(x)$, funkce má periodu 2π, z tohoto důvodu ji budeme sledovat pouze na intervalu délky jedné periody, např. v $\langle 0; 2\pi \rangle$.
3. Funkce je spojitá pro všechna x.
4. Nulové body funkce, tj. průsečíky s osou x, jsou řešení rovnice $\sin^2 x = 0$ z intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$, tedy $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$, $x_3 = 2\pi$. Průsečík s osou y najdeme, položíme-li $x = 0$. Je v bodě $[0; 0]$.
5. První derivace $y' = \dfrac{\sin x \cos x\ (4 + \sin x)}{(2 + \sin x)^2}$;
   $y' = 0$ pro: $\sin x \cos x = 0$ (neboť $4 + \sin x \neq 0$).
   Stacionární body jsou $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$, $x_3 = \pi$, $x_4 = \dfrac{3}{2}\pi$, $x_5 = 2\pi$.
   Funkce roste v $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \dfrac{3}{2}\pi\right)$ a klesá v $\left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right) \cup \left(\dfrac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$.
6. Podle změny znaménka první derivace usuzujeme, že v bodě o souřadnicích $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{1}{3}\right]$ je lokální maximum, v bodě $[\pi; 0]$ je lokální minimum a v bodě $\left[\dfrac{3}{2}\pi; 1\right]$ lokální maximum.
7. Druhá derivace $y'' = \dfrac{8 - 16 \sin^2 x - 6 \sin^3 x - \sin^4 x}{(2 + \sin x)^3}$.
   Výpočet inflexních bodů je obtížný, musí se hledat numericky. Proto se při sestavování grafu funkce spokojíme se zjištěnými skutečnostmi a sestrojíme graf na intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$. Graf vně tohoto intervalu je periodickým pokračováním.

Sestavíme pomocnou tabulku hodnot funkce.

Intervaly a body	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	π	$\left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$	$\frac{3}{2}\pi$	$\left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1/3 MAX	$\searrow$	0 MIN	$\nearrow$	1 MAX	$\searrow$

Na obr. 6.4 je sestrojena část grafu z intervalu $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$.





Obr. 6.4: Grafy funkcí $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2$, $y = \dfrac{\sin^2 x}{2 + \sin x}$.

6.12.3. Určete průběh funkce:

a) $y = x + \dfrac{1}{x}$

b) $y = x^3 + 3x$

c) $y = \dfrac{2x^3}{x^2 + 1}$

d) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$

e) $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$

f) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

g) $y = \dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$

h) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

i) $y = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$

6.12.4. Určete průběh funkce:

a) $y = \dfrac{1 - x^3}{x^2}$

b) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{1 + x^2}$

c) $y = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$

d) $y = \mathrm{e}^{-x^2}$

e) $y = x^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

f) $y = x^3 \mathrm{e}^{-x}$

g) $y = x \ln x$

h) $y = \dfrac{1}{2}x^2 - \ln x$

6.12.5. Vyšetřete průběh funkce v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$:

a) $y = \sin^2 x + \sin x$

b) $y = \cos^2 x + \cos x$

c) $y = \cos^2 x - \sin x$

d) $y = \sin^2 x - 2\cos x$

Kapitola 7

Integrální počet

7.1 Neurčitý integrál, základní vzorce

Jestliže pro všechna $x \in (a;b)$ platí

$$F'(x) \equiv f(x), \tag{7.1}$$

pak $F(x)$ se nazývá *primitivní funkce* k funkci $f(x)$ na intervalu $(a;b)$.
Je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$, C_0 je konstanta a $G(x) = F(x) + \mathrm{C}_0$, pak $G(x)$ je rovněž primitivní funkce k funkci $f(x)$. Množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na $(a;b)$ se nazývá *neurčitý integrál* funkce $f(x)$ na $(a;b)$ a značí se

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7.2}$$

Funkce $f(x)$ se nazývá *integrand* tohoto neurčitého integrálu. Jestliže $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$, pak platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + \mathrm{C}, \tag{7.3}$$

kde C je *integrační konstanta*.
Základní vlastnosti neurčitého integrálu:

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{7.4}$$

$$\int c\,f(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{kde } c \text{ je konstanta, } c \neq 0. \tag{7.5}$$

Základní vzorce pro integrování elementárních funkcí

1. $\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathrm{C} \quad \text{pro} \quad n \neq -1, \quad \mathrm{C} \text{ je integrační konstanta,}$

2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + \mathrm{C}_1 = \ln(\mathrm{C}_2\,x),$

3. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \mathrm{C},$

4. $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + \mathrm{C}, \quad a > 0,\ a \neq 1,$

5. $\displaystyle\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + \mathrm{C}$,

6. $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + \mathrm{C}$,

7. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + \mathrm{C}$,

8. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + \mathrm{C}$,

9. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \mathrm{C} = -\arccos x + \mathrm{C}$,

10. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + \mathrm{C} = -\operatorname{arccotg} x + \mathrm{C}$.

Často výhodně použijeme vztahů:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + \mathrm{C}, \tag{7.6}$$

$$\int f(ax+b) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\, F(ax+b) + \mathrm{C}, \quad a \neq 0. \tag{7.7}$$

7.1.1. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{4x-3}{\sqrt[3]{x^2}} \,\mathrm{d}x$.

Řešení: $\displaystyle\int \frac{4x-3}{\sqrt[3]{x^2}} \,\mathrm{d}x = \int \left(4x^{\frac{1}{3}} - 3x^{-\frac{2}{3}}\right) \mathrm{d}x = \frac{4x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{3x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + \mathrm{C} = 3\sqrt[3]{x}\,(x-3) + \mathrm{C}$.

7.1.2. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$.

Řešení: Integrand vhodně upravíme do tvaru, kde v čitateli je derivace jmenovatele, a použijeme vztah (7.6):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x} = \int \frac{(1+\mathrm{e}^x)-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right) \mathrm{d}x = x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + \mathrm{C}.$$

7.1.3. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+2x^2} \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Integrand upravíme a použijeme pravidlo (7.7) o integraci složené funkce, kde vnitřní funkce je lineární:

$$\int \frac{x^2}{1+2x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \frac{2x^2+1-1}{1+2x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+\left(x\sqrt{2}\right)^2}\right) \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} x\sqrt{2}\right) + \mathrm{C}.$$

7.1.4. Přímým použitím vzorců vypočtěte následující integrály:

a) $\displaystyle\int x^{12}\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{x^{13}}{13}+\mathrm{C}\right]$

b) $\displaystyle\int 3\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ $\left[2\sqrt{x^3}+\mathrm{C}\right]$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x$ $\left[-\dfrac{1}{4x^4}+\mathrm{C}\right]$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^{98}}\,\mathrm{d}x$ $\left[-\dfrac{1}{97x^{97}}+\mathrm{C}\right]$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}+\mathrm{C}\right]$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\,\mathrm{d}x$ $\left[4\sqrt[4]{x}+\mathrm{C}\right]$

g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ $\left[-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\mathrm{C}\right]$

h) $\displaystyle\int x^3\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{3}{13}\sqrt[3]{x^{13}}+\mathrm{C}\right]$

7.1.5. a) $\displaystyle\int (x^5+6x^3-2x^2)\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{1}{6}\left(x^6+9x^4-4x^3\right)+\mathrm{C}\right]$

b) $\displaystyle\int \left(5x^9-24x^7+27x^5\right)\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{1}{2}x^6\left(x^2-3\right)^2+\mathrm{C}\right]$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{b^2}{x^2}+\frac{b^3}{x^3}+\frac{b^4}{x^4}\right)\mathrm{d}x$ $\left[-\dfrac{b^2}{x}-\dfrac{b^3}{2x^2}-\dfrac{b^4}{3x^3}+\mathrm{C}\right]$

d) $\displaystyle\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{4}{7}\sqrt[4]{x^7}+\dfrac{4}{\sqrt[4]{x}}+\mathrm{C}\right]$

e) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x}+1\right)(x-\sqrt{x}+1)\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{2}{5}\sqrt[2]{x^5}+x+\mathrm{C}\right]$

7.1.6. a) $\displaystyle\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x$ $\left[3\ln|x|+\mathrm{C}\right]$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2+6x-20}{2x^3}\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{1}{2}\ln|x|-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}+\mathrm{C}\right]$

c) $\displaystyle\int \cos^3 a\,\mathrm{d}x$ $\left[x\cos^3 a+\mathrm{C}\right]$

d) $\displaystyle\int \left(3+2\mathrm{e}^x+\frac{\cos x}{6}-7x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$ $\left[3x+2\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{6}\sin x-\dfrac{7}{3}x^3+2\sqrt{x}+\mathrm{C}\right]$

7.1.7. a) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x-0.8}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ $\left[\sin x-0.8\,\mathrm{tg}\,x+\mathrm{C}\right]$

b) $\displaystyle\int \frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ $\left[\mathrm{tg}\,x-\sin x+\mathrm{C}\right]$

c) $\displaystyle\int \frac{1-2\,\mathrm{tg}^{2}x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ $\left[-\mathrm{cotg}\,x-2\,\mathrm{tg}\,x+\mathrm{C}\right]$

d) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{1-a^2}}\,\mathrm{d}x$ $\left[-\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-a^2}}+\mathrm{C}\right]$

e) $\displaystyle\int \frac{3-2\operatorname{cotg}^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ $[3\operatorname{tg} x + 2\operatorname{cotg} x + \mathrm{C}]$

7.1.8. Využitím vztahu (7.6) pro výpočet integrálu, kde v čitateli je derivace jmenovatele, řešte následující integrály:

a) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$ $\left[\ln\frac{\mathrm{C}}{|\cos x|}\right]$

b) $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$ $[\ln(\mathrm{C}|\sin x|)]$

c) $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^2+4x+1}\,\mathrm{d}x$ $\left[\ln|x^2+4x+1|+\mathrm{C}\right]$

d) $\displaystyle\int \frac{4x+12}{x^2+6x-10}\,\mathrm{d}x$ $\left[2\ln|x^2+6x-10|+\mathrm{C}\right]$

e) $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ $\left[\ln[\mathrm{C}(1+x^2)]\right]$

f) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ $\left[\ln(\mathrm{C}\sqrt{1+x^2})\right]$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{3x-5}\,\mathrm{d}x$ $\left[\ln(\mathrm{C}|\sqrt[3]{3x-5}|)\right]$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{1-6x}\,\mathrm{d}x$ $\left[\ln\frac{\mathrm{C}}{\sqrt[6]{1-6x}}\right]$

i) $\displaystyle\int \frac{2x-7}{x^2-7x+13}\,\mathrm{d}x$ $\left[\ln|x^2-7x+13|+\ln\mathrm{C}\right]$

j) $\displaystyle\int \frac{12\mathrm{e}^{3x}}{1+2\mathrm{e}^{3x}}\,\mathrm{d}x$ $\left[2\ln|1+2\mathrm{e}^{3x}|+\ln\mathrm{C}\right]$

7.1.9. Pomocí pravidla (7.7) o integraci složené funkce, kde vnitřní funkce je lineární, vypočtěte následující integrály:

a) $\displaystyle\int (2x-3)^9\,\mathrm{d}x$ $\left[\frac{1}{20}(2x-3)^{10}+\mathrm{C}\right]$

b) $\displaystyle\int \sqrt{2x-5}\,\mathrm{d}x$ $\left[\frac{1}{3}\sqrt{(2x-5)^3}+\mathrm{C}\right]$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x+a}\,\mathrm{d}x$ $[\ln|x+a|+\mathrm{C}=\ln[\mathrm{C}(x+a)]]$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{1-6x}\,\mathrm{d}x$ $\left[\frac{1}{6}\ln\frac{\mathrm{C}}{|1-6x|}\right]$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{(3x-5)^2}\,\mathrm{d}x$ $\left[-\frac{1}{3(3x-5)}+\mathrm{C}\right]$

f) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{1-5x}\,\mathrm{d}x$ $\left[-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{1-5x}+\mathrm{C}\right]$

g) $\displaystyle\int \cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$ $\left[2\sin\frac{x}{2}+\mathrm{C}\right]$

h) $\displaystyle\int (3-\sin 3x)\,\mathrm{d}x$ $\left[3x+\frac{1}{3}\cos 3x+\mathrm{C}\right]$

i) $\displaystyle\int \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$ $\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{C}\right]$

j) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 2x}\,\mathrm{d}x$ $\left[-\frac{1}{2}\mathrm{cotg}\,2x + \mathrm{C}\right]$

k) $\displaystyle\int (\sin x + \cos x)^2\,\mathrm{d}x$ $\left[x - \frac{1}{2}\cos 2x + \mathrm{C}\right]$

l) $\displaystyle\int \frac{1}{5x^2+1}\,\mathrm{d}x$ $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\,(\sqrt{5}x) + \mathrm{C}\right]$

m) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x$ $\left[\frac{1}{2}\arcsin 2x + \mathrm{C}\right]$

7.2 Substituční metoda

Substitucí rozumíme přechodné nahrazení integrační proměnné x pomocnou proměnnou dle zvoleného vztahu. Substituční metody jsou založeny na použití pravidla pro derivaci složené funkce.

Substituční metoda I

Tato metoda spočívá v tom, že vhodně zvolenou funkci obsaženou v předpisu $f(x)$ označíme jako novou jednoduchou proměnnou. Předpokládejme například, že

$$f(x) = \varphi'(x)\, g\left[\varphi(x)\right], \tag{7.8}$$

zvolíme-li $u = \varphi(x)$, pak $\mathrm{d}u = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$, a dostaneme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \varphi'(x)\, g\left[\varphi(x)\right]\mathrm{d}x = \int g(u)\,\mathrm{d}u = G(u) + \mathrm{C} = G\left(\varphi(x)\right) + \mathrm{C}, \tag{7.9}$$

kde G je primitivní funkce k funkci g.

7.2.1. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Vidíme, že čitatel funkce v integrandu je až na násobení konstantou derivací výrazu pod odmocninou. Označíme-li $u = \varphi(x) = x^2 + 1$, dostáváme $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$, a tedy:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} x^2+1 = u \\ 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{array}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{u} + \mathrm{C} = \sqrt{x^2+1} + \mathrm{C}.$$

7.2.2. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{3\cos^3 x}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Integrand nejprve upravíme a zvolíme substituci $u = \sin x$, odtud $\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$. Dostaneme

$$\int \frac{3\cos^3 x}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^4 x}\,\cos x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} \sin x = u \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{array}\right|$$
$$= 3\int \frac{1-u^2}{u^4}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{u^3} + \frac{3}{u} + \mathrm{C} = \frac{3\sin^2 x - 1}{\sin^3 x} + \mathrm{C}.$$

7.2.3. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Zvolíme substituci $\sqrt{x+1}=u$, odtud $x=u^2-1$, $\mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u$. Pak

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,\mathrm{d}x &= \left|\begin{array}{r}\sqrt{x+1}=u \;\Rightarrow\; x=u^2-1\\ \mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u\end{array}\right| = 2\int \frac{u+1}{u-1}u\,\mathrm{d}u = 2\int \frac{u^2+u}{u-1}\,\mathrm{d}u\\ &= 2\int \left(u+2+\frac{2}{u-1}\right)\mathrm{d}u = u^2+4u+4\ln|u-1|+\mathrm{C}\\ &= 4\ln|\sqrt{x+1}-1|+4\sqrt{x+1}+x+1+\mathrm{C}.\end{aligned}$$

Substituční metoda II

Druhý typ substituční metody spočívá naopak v tom, že na místo původní proměnné x dosadíme vhodnou funkci $x=\psi(z)$, pak je $\mathrm{d}x=\psi'(z)\,\mathrm{d}z$. Místo primitivní funkce k funkci $f(x)$ pak hledáme primitivní funkci $G(z)$ k funkci $g(z)=f\left[\psi(z)\right]\psi'(z)$:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f\left[\psi(z)\right]\psi'(z)\,\mathrm{d}z = \int g(z)\,\mathrm{d}z = G(z)+\mathrm{C} = G\left[\psi^{-1}(x)\right]+\mathrm{C}. \tag{7.10}$$

Typické jsou neurčité integrály, které vedou na goniometrické substituce.

7.2.4. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Zvolíme-li $x=\psi(z)=\sin z$ (a tedy $z=\arcsin x$), dostaneme $\mathrm{d}x=\cos z\,\mathrm{d}z$, pak:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \left|\begin{array}{c}x=\sin z\\ \mathrm{d}x=\cos z\,\mathrm{d}z\end{array}\right| = \int \sqrt{1-\sin^2 z}\,\cos z\,\mathrm{d}z = \int \cos^2 z\,\mathrm{d}z\\ &= \int \frac{1+\cos 2z}{2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}z+\frac{\sin 2z}{4}+\mathrm{C} = \frac{1}{2}z+\frac{2\sin z\cos z}{4}+\mathrm{C}\\ &= \frac{1}{2}\arcsin x+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\mathrm{C}.\end{aligned}$$

7.2.5. Vhodnou substitucí řešte integrály:

a) $\displaystyle\int \sin 5x\,\mathrm{d}x$ $\left[-\dfrac{1}{5}\cos 5x+\mathrm{C}\right]$

b) $\displaystyle\int (x+17)^{38}\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{(x+17)^{39}}{39}+\mathrm{C}\right]$

c) $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{C}\right]$

d) $\displaystyle\int \left(x\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+\mathrm{C}\right]$

e) $\displaystyle\int \frac{x^4}{\sqrt{1-2x^5}}\,\mathrm{d}x$ $\left[-\dfrac{1}{5}\sqrt{1-2x^5}+\mathrm{C}\right]$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[5]{3x-2}}\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{5}{12}\sqrt[5]{(3x-2)^4}+\mathrm{C}\right]$

7.2.6. a) $\displaystyle\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{\cos^3 x}{3}-\cos x+\mathrm{C}\right]$

b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\sin x}\,\cos x\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{\sin^4 x} + \mathrm{C}\right]$

c) $\displaystyle\int \sin x \cos x\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{\sin^2 x}{2} + \mathrm{C}\right]$

d) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sin x} \cos x\,\mathrm{d}x$ $\left[\mathrm{e}^{\sin x} + \mathrm{C}\right]$

e) $\displaystyle\int \cos^2 x \sin x\,\mathrm{d}x$ $\left[-\dfrac{\cos^3 x}{3} + \mathrm{C}\right]$

f) $\displaystyle\int \cos^3 x \sin x\,\mathrm{d}x$ $\left[-\dfrac{1}{4}\cos^4 x + \mathrm{C}\right]$

7.2.7. a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{\ln^2 x}{2} + \mathrm{C}\right]$

b) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{\ln^3 x}{3} + \mathrm{C}\right]$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} + \mathrm{C}\right]$

d) $\displaystyle\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ $\left[\cos\dfrac{1}{x} + \mathrm{C}\right]$

7.2.8. a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + \mathrm{C}\right]$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + \mathrm{C}\right]$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^6}\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3 + \mathrm{C}\right]$

d) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{\arcsin^2 x}{2} + \mathrm{C}\right]$

7.3 Integrace metodou per partes

Z pravidla pro derivaci součinu funkcí vyplývá vztah pro integraci po částech (per partes):

$$\boxed{\int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x,} \qquad (7.11)$$

stručněji

$$\int u\,\mathrm{d}v = u\cdot v - \int v\,\mathrm{d}u\,. \qquad (7.12)$$

V základních integrálech není žádný integrál logaritmické ani cyklometrické funkce, ani integrál součinu funkcí různého druhu (algebraické a transcendentní, goniometrické a exponenciální apod.). V těchto případech je zpravidla použití metody per partes nevyhnutelné. Používá se však s výhodou i v jiných případech, kdy na pravé straně vztahu (7.11) dostaneme integrál známý nebo výchozí. Využíváme hlavně těchto skutečností, známých z diferenciálního počtu:

- derivace polynomu je polynom nižšího stupně;
- derivace funkcí logaritmických a cyklometrických jsou funkce algebraické;
- derivace funkcí exponenciálních a goniometrických jsou funkce téhož druhu.

7.3.1. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int (x^2-3x-8)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Při výpočtu integrálu použijeme metody per partes dvakrát ke snížení stupně polynomu. Nejprve volíme $u = x^2-3x-8$, $v' = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$, odtud $u' = 2x-3$, $v = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$, podruhé podobně:

$$\begin{aligned}\int (x^2-3x-8)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x &= \left|\begin{array}{ll} u\ = x^2-3x-8 & v' = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \\ u' = 2x-3 & v\ = 2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\end{array}\right| \\ &= 2(x^2-3x-8)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 2\int (2x-3)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left|\begin{array}{ll} u\ = 2x-3 & v' = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \\ u' = 2 & v\ = 2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\end{array}\right| \\ &= 2(x^2-3x-8)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 4(2x-3)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + 8\int \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2(x^2-7x+6)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + \mathrm{C}.\end{aligned}$$

7.3.2. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Příklad lze řešit i substituční metodou. Užitím metody per partes dostáváme:

$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u\ = \ln x & v' = \dfrac{1}{x} \\ u' = \dfrac{1}{x} & v\ = \ln x\end{array}\right| = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x,$$

odtud

$$\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^2 x + \mathrm{C}.$$

7.3.3. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\begin{aligned}\int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \left|\begin{array}{ll} u\ = \arccos\sqrt{x} & v' = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \\ u' = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} & v\ = 2\sqrt{x}\end{array}\right| = 2\sqrt{x}\arccos\sqrt{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} \\ &= 2\left(\sqrt{x}\arccos\sqrt{x} - \sqrt{1-x}\right) + \mathrm{C}.\end{aligned}$$

7.3.4. Řešte integrály:

a) $\displaystyle\int x\sin x\,\mathrm{d}x$ $\quad[-x\cos x + \sin x + \mathrm{C}]$

b) $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ $\quad[x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + \mathrm{C}]$

c) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$ $\quad\left[\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x + \cos x) + \mathrm{C}\right]$

d) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$ $\quad\left[\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x) + \mathrm{C}\right]$

7.3.5. a) $\int (x^2 - x)\cos x \, \mathrm{d}x$ $\quad [(x^2 - x)\sin x + (2x-1)\cos x - 2\sin x + \mathrm{C}]$

b) $\int (x+2)\, 3^x \, \mathrm{d}x$ $\quad \left[(x+2)\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + \mathrm{C}\right]$

c) $\int (x^2 - x - 1)\, \mathrm{e}^{-2x} \, \mathrm{d}x$ $\quad \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}(x^2 - 1) + \mathrm{C}\right]$

d) $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$ $\quad \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cos x + \mathrm{C}\right]$

e) $\int x \sin^2 x \, \mathrm{d}x$ $\quad \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + \mathrm{C}\right]$

7.3.6. a) $\int \ln x \, \mathrm{d}x$ $\quad [x \ln x - x + \mathrm{C}]$

b) $\int \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x$ $\quad \left[-\frac{1}{x}(\ln x + 1) + \mathrm{C}\right]$

c) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} \, \mathrm{d}x$ $\quad \left[-\frac{1}{x}\left(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6\right) + \mathrm{C}\right]$

d) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$ $\quad \left[-\frac{1}{x}\ln^2 x - \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} + \mathrm{C}\right]$

7.3.7. a) $\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$ $\quad \left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + \mathrm{C}\right]$

b) $\int 2x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$ $\quad [x^2 \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x + \mathrm{C}]$

c) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} \, \mathrm{d}x$ $\quad \left[x \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + \mathrm{C}\right]$

d) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} \, \mathrm{d}x$ $\quad [2\sqrt{1+x}\arcsin x - 4\sqrt{1-x} + \mathrm{C}]$

7.4 Integrace racionálních funkcí

Funkce se nazývá *racionální lomená*, je-li podílem dvou polynomů, tj.

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}, \tag{7.13}$$

kde $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$. Platí-li pro stupně polynomu $P_m(x)$ a $Q_n(x)$, že $m < n$, pak se funkce $R(x)$ nazývá *ryze lomenou* racionální funkcí. Je-li $m \geq n$, funkci $R(x)$ nazýváme *neryze lomenou* racionální funkcí. Každou racionální neryze lomenou funkci lze upravit na součet polynomu a racionální ryze lomené funkce (částečný podíl dvou polynomů plus zbytek)

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}, \tag{7.14}$$

kde polynom $P_1(x)$ je stupně $m_1 = m - n$ a polynom P_2 je stupně $m_2 < n$.

Obecný postup při integraci racionálních funkcí:

- rozklad racionální neryze lomené funkce na ryze lomenou funkci a polynom dělením;
- úplný rozklad polynomu $Q(x)$ ve jmenovateli v reálném oboru;

- rozklad racionální ryze lomené funkce na parciální zlomky, určení koeficientů (počet koeficientů je roven stupni polynomu $Q(x)$, koeficienty musí být určeny jednoznačně);
- integrace polynomu a parciálních zlomků.

7.4.1. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int\left(\frac{5}{(x-2)^{98}}+\frac{2}{(2x-5)^2}+\frac{8}{4-x}\right)\mathrm{d}x$.

Řešení: V integrandu jsou pouze ryze lomené funkce, integrál vyřešíme přímým použitím vzorců a pomocí pravidla (7.7) o integraci složené funkce, kde vnitřní funkce je lineární:

$$\int\left(\frac{5}{(x-2)^{98}}+\frac{2}{(2x-5)^2}+\frac{8}{4-x}\right)\mathrm{d}x=-\frac{5}{97}\frac{1}{(x-2)^{97}}-\frac{1}{(2x-5)}-8\ln|4-x|+\mathrm{C}.$$

7.4.2. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int\frac{x^3-2x+1}{x+4}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Integrand je neryze lomená funkce, částečným dělením snížíme stupeň čitatele pod stupeň jmenovatele, dostaneme součet polynomu a ryze lomené funkce, který již snadno zintegrujeme:

$$\frac{x^3-2x+1}{x+4}=x^2-4x+14-\frac{55}{x+4}\,,$$

$$\int\frac{x^3-2x+1}{x+4}\,\mathrm{d}x=\int\left(x^2-4x+14-\frac{55}{x+4}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-2x^2+14x-55\ln|x+4|+\mathrm{C}.$$

Parciální zlomky I. druhu

Provedeme-li úplný rozklad polynomu $Q(x)$ v reálném oboru a dostaneme

$$Q(x)=a_0\,(x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_r)^{k_r}\,, \tag{7.15}$$

kde $a_1, \ldots, a_r$ jsou reálné kořeny polynomu $Q(x)$ a $k_1, \ldots, k_r$ jejich násobnosti, pak existuje jednoznačný rozklad ryze lomené funkce na parciální zlomky:

$$\begin{aligned}\frac{P_2(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x-a_1}+\frac{A_{12}}{(x-a_1)^2}+\cdots+\frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}}+\frac{A_{21}}{x-a_2}+\frac{A_{22}}{(x-a_2)^2}+\cdots+\frac{A_{2k_2}}{(x-a_2)^{k_2}}\\ &\quad+\cdots+\frac{A_{r1}}{x-a_r}+\frac{A_{r2}}{(x-a_r)^2}+\cdots+\frac{A_{rk_r}}{(x-a_r)^{k_r}}\\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j}\,,\end{aligned} \tag{7.16}$$

kde A_{ij} jsou jednoznačně určitelné konstanty.

Zlomky typu $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ se nazývají parciální zlomky I. druhu. Ze znalosti základních vzorců pro integrování víme, že platí

$$k=1:\qquad \int\frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x=A\ln|x-a|+\mathrm{C} \tag{7.17}$$

$$k>1:\qquad \int\frac{A}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x=\frac{-A}{(k-1)(x-a)^{k-1}}+\mathrm{C} \tag{7.18}$$

U složitějších příkladů identitu (7.16) násobíme společným jmenovatelem a získáme rovnici, ze které porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme soustavu $(k_1 + \cdots + k_r)$ lineárních nezávislých rovnic pro $(k_1 + \cdots + k_r)$ konstant A_{ij}. Tím je integrace funkce (7.13) převedena na integraci $P_1(x)$ a parciálních zlomků (viz řešené příklady).

7.4.3. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{x+20}{x^3 - 2x^2 - 8x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Funkce v integrandu je ryze lomená. Rozklad jmenovatele v reálném oboru:

$$x^3 - 2x^2 - 8x = x(x^2 - 2x - 8) = x(x+2)(x-4).$$

Podle (7.16) provedeme rozklad ryze lomené funkce na parciální zlomky:

$$\frac{x+20}{x(x+2)(x-4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-4}\,.$$

Získanou rovnici vynásobíme společným jmenovatelem $x(x+2)(x-4)$ a dostaneme:

$$x + 20 = Ax(x-4) + B(x+2)(x-4) + Cx(x+2).$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme soustavu tří rovnic pro hledané konstanty A, B, C:

$$\begin{aligned} 0 &= A + B + C \\ 1 &= -2(2A + B - C) \\ 20 &= -8B, \end{aligned}$$

soustava má jediné řešení $A = 3/2$, $B = -5/2$, $C = 1$. Proto

$$\begin{aligned} \int \frac{x+20}{x^3 - 2x^2 - 8x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{3}{x+2} - \frac{5}{x} + \frac{2}{x-4}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(3\ln|x+2| - 5\ln|x| + 2\ln|x-4|\right) + \mathrm{C}_1 \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{\mathrm{C}(x+2)^3(x-4)^2}{x^5}. \end{aligned}$$

7.4.4. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Integrand je neryze lomená funkce, upravíme jej a provedeme rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{x^2+1}{x^2-4} = \frac{x^2-4+5}{x^2-4} = 1 + \frac{5}{x^2-4} = 1 + \frac{5}{(x+2)(x-2)}$$

$$\frac{5}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}.$$

Vynásobením společným jmenovatelem získáme rovnici:

$$5 = A(x-2) + B(x+2),$$

porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme soustavu dvou rovnic pro hledané konstanty A a B:

$$\begin{aligned} 5 &= 2(B - A) \\ 0 &= A + B, \end{aligned}$$

tato soustava má jediné řešení $A = -5/4$ a $B = 5/4$, a tedy:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{5}{4(x+2)} + \frac{5}{4(x-2)}\right)\mathrm{d}x$$
$$= x - \frac{5}{4}\ln|x+2| + \frac{5}{4}\ln|x-2| + \mathrm{C} = x + \frac{5}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + \mathrm{C}.$$

7.4.5. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Integrand je ryze lomená funkce, provedeme úplný rozklad jmenovatele

$$x^3+2x^2+x = x(x+1)^2,$$

podle (7.16) rozložíme ryze lomenou funkci na parciální zlomky:

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}\,.$$

Vynásobením společným jmenovatelem získáme rovnici

$$x^2-3x+2 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

a porovnáním koeficientů dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 &= A + B \\ -3 &= 2A + B + C \\ 2 &= A, \end{aligned}$$

která má jediné řešení $A = 2$, $B = -1$, $C = -6$, tedy:

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{6}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= 2\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} + \mathrm{C} = \ln\frac{x^2}{|x+1|} + \frac{6}{x+1} + \mathrm{C}.$$

7.4.6. Vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ $\qquad [x - \ln \mathrm{C}|x+1|]$

b) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x+2}\,\mathrm{d}x$ $\qquad \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - 8x + 16\ln|x+2| + \mathrm{C}\right]$

c) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x-4)(x+3)}\,\mathrm{d}x$ $\qquad [\ln \mathrm{C}(x-4)(x+3)]$

d) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad \left[\frac{1}{2}\ln \mathrm{C}x(x+2)\right]$

e) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x$ $\qquad [\ln(x+3)^3 - \ln(x+2)^2 + \ln \mathrm{C}]$

f) $\displaystyle\int \frac{x}{2x^2-3x-2}\,\mathrm{d}x$ $\qquad \left[\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\ln|x-2| + \frac{1}{5}\ln\left|x+\frac{1}{2}\right|\right) + \mathrm{C}\right]$

Parciální zlomky II. druhu

Jedná se o typ $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, kde kvadratický trojčlen x^2+px+q nemá kořeny v $\mathbb{R}$, takže jej nelze rozložit na součin kořenových činitelů $(x-x_1)(x-x_2)$ s reálnými x_1, x_2 (diskriminant je záporný). Pro čitatele platí

$$Mx+N=\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{pM}{2}=C(2x+p)+D, \tag{7.19}$$

existuje tedy jedinečný rozklad ryze lomené funkce na parciální zlomky:

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}=\sum_{i=1}^{k}\frac{M_i\,x+N_i}{(x^2+px+q)^i}=\sum_{i=1}^{k}\frac{C_i(2x+p)+D_i}{(x^2+px+q)^i}, \tag{7.20}$$

kde M_i, N_i, resp. C_i a D_i, jsou konstanty. Pro $k=1$ při integraci dostaneme:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x=\int\frac{C(2x+p)}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x+\int\frac{D}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x\,. \tag{7.21}$$

Vidíme, že u prvního integrálu je v čitateli derivace jmenovatele, snadno jej tedy vypočteme pomocí pravidla (7.6). Při výpočtu druhého integrálu často použijeme proceduru „doplnění na čtverec“, která pro $k=1$ vede na arctg x (viz řešené příklady).

V reálném oboru lze tedy polynom $Q(x)$ obecně rozložit do tvaru

$$Q(x)=b_n\,(x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_r)^{k_r}\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\cdots\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s}, \tag{7.22}$$

kde $a_1,\ldots,a_r$ jsou reálné kořeny polynomu $Q(x)$, $k_1,\ldots,k_r$ jejich násobnosti, $\left(x^2+p_jx+q_j\right)$, kde $1\le j\le s$, jsou kvadratické trojčleny, které již nejsou v reálném oboru dále rozložitelné, a $l_1,\ldots l_s$ jsou jejich násobnosti. Pak existuje jednoznačný rozklad ryze lomené funkce na parciální zlomky:

$$\frac{P_2(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j}+\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{l_\alpha}\frac{M_{\alpha\beta}\,x+N_{\alpha\beta}}{(x^2+p_\alpha x+q_\alpha)^\beta}\,. \tag{7.23}$$

7.4.7. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-2x+3}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Zde stačí upravit jmenovatele použitím procedury „doplnění na čtverec“:

$$\int\frac{1}{x^2-2x+3}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2-2x+1+2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x-1)^2+2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-1}{\sqrt{2}}+\mathrm{C}.$$

7.4.8. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int\frac{6x^4}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Integrand je neryze lomená funkce. Částečným dělením ji upravíme na součet polynomu a racionální ryze lomené funkce:

$$\frac{6x^4}{x^3-1}=6x+\frac{6x}{(x-1)(x^2+x+1)}\,.$$

Podle vztahu (7.21) provedeme rozklad na parciální zlomky

$$\frac{6x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B(2x+1)+C}{x^2+x+1}\,.$$

Vynásobením společným jmenovatelem $(x-1)(x^2+x+1)$ dostaneme:

$$\begin{aligned}6x &= A(x^2+x+1) + B(2x+1)(x-1) + C(x-1)\\ 6x &= (A+2B)x^2 + (A-B+C)x + A - B - C,\end{aligned}$$

porovnáním koeficientů u stejných mocnin x získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}0 &= A + 2B\\ 6 &= A - B + C\\ 0 &= A - B - C,\end{aligned}$$

jež má jediné řešení $A = 2$, $B = -1$, $C = 3$. Tedy

$$\begin{aligned}\int \frac{6x^4}{x^3-1}\,\mathrm{d}x &= \int \left(6x + \frac{2}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)\mathrm{d}x\\ &= 3x^2 + 2\ln|x-1| - \ln(x^2+x+1) + 3\sqrt{\frac{3}{4}}\frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + \mathrm{C}\\ &= 3x^2 + \ln\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1} + 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \mathrm{C}.\end{aligned}$$

7.4.9. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{8x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Integrand je ryze lomená funkce, provedeme úplný rozklad jmenovatele

$$x^4 - 1 = \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right) = (x+1)\,(x-1)\left(x^2+1\right),$$

podle (7.16) a (7.20) rozložíme ryze lomenou funkci na parciální zlomky; ve jmenovateli se vyskytuje také neúplný nerozložitelný kvadrát $\left(x^2+1\right)$, tj. v (7.19) je $p = 0$, proto má parciální zlomek II. druhu nyní tvar $\dfrac{Cx+D}{(x^2+1)}$:

$$\frac{8x}{(x+1)\,(x-1)\,(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)},$$

tuto identitu vynásobíme společným jmenovatelem a získáme rovnici

$$8x = A(x-1)\left(x^2+1\right) + B(x+1)\left(x^2+1\right) + (Cx+D)\left(x^2-1\right),$$

porovnáním koeficientů dostaneme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých

$$\begin{aligned}0 &= A + B + C\\ 0 &= -A + B + D\\ 8 &= A + B - C\\ 0 &= -A + B - D,\end{aligned}$$

kterou řešíme např. Gaussovou eliminační metodou a získáme řešení $A = 2$, $B = 2$, $C = -4$, $D = 0$, tedy:

$$\begin{aligned}\int \frac{8x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4x}{(x^2+1)}\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\ln|x+1| + 2\ln|x-1| - 2\int \frac{2x}{(x^2+1)}\,\mathrm{d}x + \mathrm{C}_1 \\ &= \ln\left(x^2-1\right)^2 - 2\ln\left(x^2+1\right) + \mathrm{C}_2 = \ln \mathrm{C}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2.\end{aligned}$$

7.4.10. Vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right| - \dfrac{5}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{2} + \mathrm{C}\right]$

b) $\displaystyle\int \frac{5-3x}{x^2-6x+12}\,\mathrm{d}x$ $\left[-\dfrac{3}{2}\ln\left|x^2-6x+12\right| - \dfrac{4}{3}\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x-3}{\sqrt{3}} + \mathrm{C}\right]$

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2}$ $\left[-\dfrac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + \mathrm{C}\right]$

d) $\displaystyle\int \frac{x^6+2}{x^4+x^2}\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{x^3}{3} - x - \dfrac{2}{x} - \operatorname{arctg} x + \mathrm{C}\right]$

e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2\,(1+x^2)}$ $\left[\dfrac{1}{2}\ln \mathrm{C}\left|\dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\right| - \dfrac{1}{2(1+x)}\right]$

7.5 Integrace goniometrických funkcí

Při integraci goniometrických funkcí používáme nejčastěji následující metody (označme $R(x, y, \ldots)$ racionální funkci svých argumentů, m, n jsou celá čísla):

1. $\displaystyle\int \sin^m x \cos^n x\,\mathrm{d}x$ se řeší těmito způsoby:

   a) pro m liché substitucí $\cos x = t$,

   b) pro n liché substitucí $\sin x = t$,

   c) pro m, n sudá využitím známých identit (7.26) – (7.35).

2. $\displaystyle\int f(ax+b)\,g(cx+d)\,\mathrm{d}x$, kde $f(t)$ a $g(t)$ značí $\sin t$ nebo $\cos t$, se řeší použitím součtových vzorců.

3. $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ řešíme pomocí tzv. univerzální goniometrické substituce $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ (viz dále), pak

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}. \tag{7.24}$$

4. $\displaystyle\int R\left(\sin^2 x, \cos^2 x, \operatorname{tg} x\right)\mathrm{d}x$ převádíme na integraci racionální funkce substitucí $\operatorname{tg} x = t$, pak

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}. \tag{7.25}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{7.26}$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1 \tag{7.27}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \tag{7.28}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \tag{7.29}$$

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \tag{7.32}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \tag{7.33}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{7.30}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \tag{7.31}$$

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2} \tag{7.34}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \tag{7.35}$$

7.5.1. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cotg} 2x}{\sin 2x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Stačí provést úpravu integrandu, při které použijeme vztahy (7.28) a (7.30):

$$\frac{\operatorname{cotg} 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{4\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right),$$

proto

$$\int \frac{\operatorname{cotg} 2x}{\sin 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\left(\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x\right) + \mathrm{C} = -\frac{1}{2\sin 2x} + \mathrm{C},$$

samozřejmě pro $x \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}_0$.

7.5.2. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Převedením na goniometrické funkce dvojnásobného argumentu (viz vzorce (7.28), (7.30), (7.32)) dostaneme:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + \mathrm{C}\\ &= \frac{1}{8}\left(x - \sin x\cos^3 x + \sin^3 x\cos x\right) + \mathrm{C}.\end{aligned}$$

7.5.3. Pomocí základních pravidel a vzorců (7.26) – (7.35) vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ $[\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + \mathrm{C}]$

b) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ $[\operatorname{tg} x - x + \mathrm{C}]$

c) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$ $[\operatorname{tg} x - x + \mathrm{C}]$

d) $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x$ $[-\operatorname{cotg} x - x + \mathrm{C}]$

7.5.4. a) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\,\mathrm{d}x$ $\quad [\sin x - \cos x + \mathrm{C}]$

b) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ $\quad [-\mathrm{cotg}\ x - \mathrm{tg}\ x + \mathrm{C}]$

c) $\displaystyle\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$ $\quad \left[-\frac{1}{2}\cos x + \mathrm{C}\right]$

d) $\displaystyle\int \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$ $\quad [x + \cos x + \mathrm{C}]$

7.5.5. a) $\displaystyle\int \sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$ $\quad \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x + \mathrm{C}\right]$

b) $\displaystyle\int \cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$ $\quad \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + \mathrm{C}\right]$

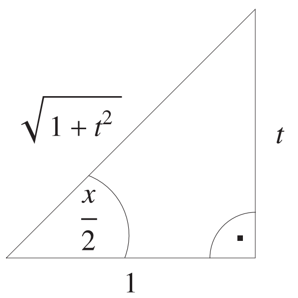
c) $\displaystyle\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ $\quad \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x\cos x + \mathrm{C}\right]$

d) $\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ $\quad \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x\cos x + \mathrm{C}\right]$

Univerzální goniometrická substituce $\mathrm{tg}\ \frac{x}{2} = t$

Integrály typu $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$, kde funkce $\sin x$, $\cos x$ jsou v první mocnině, převádíme pomocí tzv. univerzální goniometrické substituce $\mathrm{tg}\ \frac{x}{2} = t$ na integraci racionální funkce.

Odvození:



$$\mathrm{tg}\ \frac{x}{2} = t \qquad \sin\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\frac{x}{2} = \mathrm{arctg}\ t \qquad \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$x = 2\ \mathrm{arctg}\ t \qquad \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

7.5.6. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x - 2\sin x + 3}$.

Řešení: Použitím univerzální goniometrické substituce $\mathrm{tg}\ \frac{x}{2} = t$ dostaneme:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x - 2\sin x + 3} = \int \frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{4t}{1+t^2} + 3} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{1 - t^2 - 4t + 3 + 3t^2}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2 + 1} = \mathrm{arctg}\ (t-1) + \mathrm{C} = \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\ \frac{x}{2} - 1\right) + \mathrm{C}.$$

7.5.7. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\cos x - 1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Integrál převedeme univerzální goniometrickou substitucí na integrál racionální ryze lomené funkce, který vypočteme pomocí rozkladu na parciální zlomky:

$$\int \frac{\cos x}{\cos x - 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{-2t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{t^2-1}{t^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \int \left(\frac{2}{1+t^2} - \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{arctg}\,t + \frac{1}{t} + \mathrm{C} = x + \mathrm{cotg}\,\frac{x}{2} + \mathrm{C}.$$

7.5.8. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{1-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Použitím univerzální goniometrické substituce dostaneme:

$$\int \frac{1-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\frac{2t}{t^2+1}}{\frac{1-t^2}{t^2+1}} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\int \frac{(1-t)^2}{(t^2+1)(1-t^2)}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{1-t}{(t^2+1)(1+t)}\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\int \left(\frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = 2\int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{t}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \ln(1+t)^2 + \ln(t^2+1) + \mathrm{C} = \ln\left(1+\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right)^2 + \ln\left(\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+1\right) + \mathrm{C}.$$

7.5.9. Pomocí univerzální goniometrické substituce řešte integrály:

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ $\qquad \left[\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| + \mathrm{C}\right]$

b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4+5\cos x}$ $\qquad \left[\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{3-\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}\right| + \mathrm{C}\right]$

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{5-3\cos x}$ $\qquad \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right) + \mathrm{C}\right]$

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x - 2}$ $\qquad \left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}\right) + \mathrm{C}\right]$

7.6 Integrace iracionálních funkcí

Integrály iracionálních funkcí se zpravidla řeší převedením na integrály racionální lomené funkce pomocí vhodné substituce. Označme $R(x,u,v,t\ldots)$ racionální funkci svých argumentů.

1. Jsou-li m, n přirozená čísla, a, b, c, d reálná čísla, $ad-bc\neq 0$, pak integrály typu

   a) $\displaystyle\int R\left(\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ řešíme substitucí $\displaystyle\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$;

   b) $\displaystyle\int R\left(\sqrt[m]{\frac{ax^n+b}{cx^n+d}}\right)x^{n-1}\,\mathrm{d}x$ řešíme substitucí $\displaystyle\sqrt[m]{\frac{ax^n+b}{cx^n+d}} = t$.

2. Integrály $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$ řešíme tzv. *Eulerovými substitucemi*:

   a) je-li $a>0$, použijeme substituce $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$;

   b) je-li $D = b^2-4ac > 0$, pak $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = |x-x_2|\sqrt{\dfrac{a(x-x_1)}{x-x_2}}$, dále viz bod 1.;

c) je-li $c > 0$, použijeme substituce $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$.

Někdy lze výhodně použít i goniometrické substituce.

7.6.1. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+x)\sqrt{1+x}}$.

Řešení: Zvolíme substituci $\sqrt{1+x} = t$ (viz bod 1a):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+x)\sqrt{1+x}} = \left| \begin{array}{r} 1+x = t^2 \;\Rightarrow\; x = t^2-1 \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t\,(t^2+1)} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$
$$= 2\operatorname{arctg} t + \mathrm{C} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{1+x} + \mathrm{C}.$$

7.6.2. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\,(1+\sqrt[3]{x})}$.

Řešení: Podle bodu (1a) zvolíme substituci $\sqrt[3]{x} = t$, při výpočtu použijeme rozklad ryze lomené funkce na parciální zlomky:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\,(1+\sqrt[3]{x})} = \left| \begin{array}{l} x = t^3 \\ \mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{3t^2\,\mathrm{d}t}{t^3\,(1+t)} = 3\int \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t)}$$
$$= 3\int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} \right) \mathrm{d}t = 3\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) \mathrm{d}t =$$
$$= 3\ln|t| - 3\ln|1+t| + \mathrm{C}_1 = \ln \mathrm{C} \left| \frac{x}{(1+\sqrt[3]{x})^3} \right|.$$

7.6.3. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

Řešení: Integrand lze psát ve tvaru $R\left(\sqrt[6]{x}\right)$. Podle bodu (1a) zvolíme substituci $\sqrt[6]{x} = t$, dostaneme racionální neryze lomenou funkci, kterou upravíme částečným dělením na součet polynomu a racionální ryze lomené funkce a zintegrujeme:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^6 \\ \mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3-t^2} = 6\int \frac{t^3}{t-1}\,\mathrm{d}t = 6\int \left(t^2+t+1+\frac{1}{t-1} \right) \mathrm{d}t$$
$$= 2t^3 + 3t^2 + 6t + 6\ln|t-1| + \mathrm{C} = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + \ln\left(\sqrt[6]{x}-1\right)^6 + \mathrm{C}.$$

7.6.4. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Integrand je definován v intervalu $(-1;1)$. Použijeme např. substituci $x = \cos t$, $t \in (0;\pi)$:

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x = \cos t \\ \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = -\int \frac{1-\cos t}{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t$$
$$= \int (\cos t - 1)\,\mathrm{d}t = \sin t - t + \mathrm{C} = \left| \begin{array}{l} \sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} \\ \quad\;\; = \sqrt{1-x^2} \end{array} \right|$$
$$= \sqrt{1-x^2} - \arccos x + \mathrm{C}.$$

7.6.5. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$.

Řešení: Použijeme Eulerovu substituci (viz bod 2a)

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+4x-4} &= t-x \\
x^2+4x-4 &= t^2-2tx+x^2 \\
x &= \frac{t^2+4}{2(2+t)} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{x^2+4x-4} = \frac{t^2+4t-4}{2(2+t)} \\
\mathrm{d}x &= \frac{t^2+4t-4}{2(2+t)^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

a dostaneme:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+4x-4}} &= \int \frac{2(2+t)}{t^2+4}\cdot\frac{2(2+t)}{t^2+4t-4}\cdot\frac{t^2+4t-4}{2(2+t)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{t^2+4}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1} = \operatorname{arctg}\frac{t}{2} + \mathrm{C} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+4x-4}+x}{2} + \mathrm{C}
\end{aligned}$$

7.6.6. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}}$.

Řešení: Podle (2c) volíme Eulerovu substituci ve tvaru:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-x-x^2} &= xt-1 \\
1-x-x^2 &= x^2t^2-2xt+1 \\
x &= \frac{2t-1}{t^2+1} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{1-x-x^2} = \frac{t^2-t-1}{t^2+1} \\
\mathrm{d}x &= \frac{2\left(1+t-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

dosadíme, upravíme integrand a při výpočtu integrálu použijeme rozklad ryze lomené funkce na parciální zlomky:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}} &= \int \frac{2t-1}{t^2+1}\cdot\frac{t^2+1}{t^2+2t}\cdot\frac{t^2+1}{t^2-t-1}\cdot\frac{2\left(1+t-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{2-4t}{\left(t^2+2t\right)\left(t^2+1\right)}\,\mathrm{d}t = \int\left(\frac{A}{t}+\frac{B}{t+2}+\frac{Ct+D}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}-\frac{2}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{t}{t+2}\right| - 2\operatorname{arctg} t + \mathrm{C} \\
&= \ln\frac{1+\sqrt{1-x-x^2}}{\left|1+2x+\sqrt{1-x-x^2}\right|} - 2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{1-x-x^2}}{x} + \mathrm{C}.
\end{aligned}$$

7.6.7. Vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sqrt{x}}$ $\qquad \left[2\sqrt{x} - \ln\left(2+\sqrt{x}\right)^4 + \mathrm{C}\right]$

b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,\mathrm{d}x$ $\qquad \left[4\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right| + 4\sqrt{x+1} + x + 1 + \mathrm{C}\right]$

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}\right)}$ $\qquad \left[\ln(1-x^{-\frac{1}{6}})^6 + 6x^{-\frac{1}{6}} + 3x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{1}{2}} + \mathrm{C}\right]$

7.7 Určitý Riemannův integrál

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$. Graf této funkce spolu s přímkami o rovnicích $x = a$, $x = b$ a osou x vymezí v souřadnicové rovině xy rovinný útvar (viz obr. 7.1). Dělme interval $\langle a; b\rangle$ dělícími body $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ na n částečných intervalů $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, které nemusí mít stejnou délku. Pak platí

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a. \tag{7.36}$$

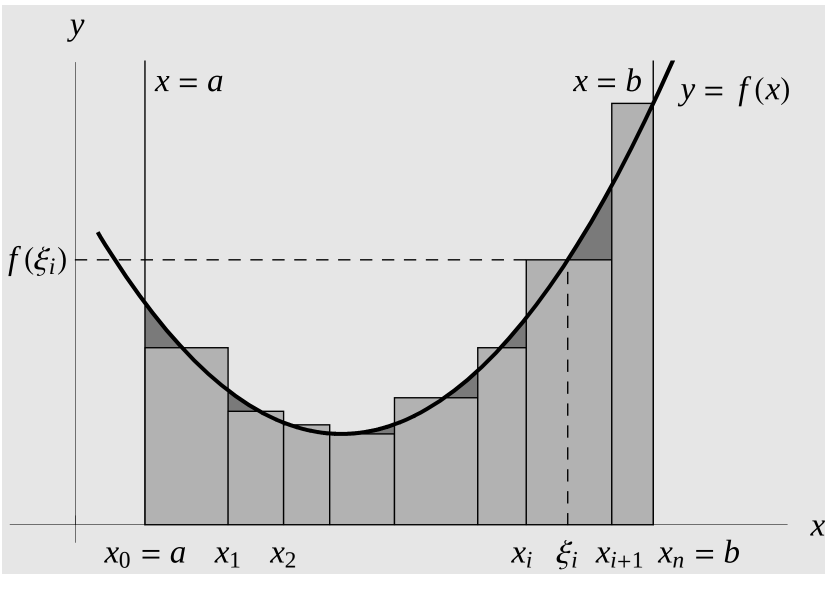
V každém z těchto částečných intervalů zvolme libovolný bod ξ_i $(i = 1, \ldots, n)$ tak, aby platilo $x_{i-1} < \xi_i < x_i$, a určeme jeho funkční hodnotu $f(\xi_i)$. Nyní utvořme součty součinů

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{7.37}$$

tento vztah se nazývá *integrální součet* příslušný funkci $f(x)$ a danému dělení. Je-li $f(x) \geq 0$ na $\langle a; b\rangle$, lze integrální součty znázornit jako obsah obrazce složeného z obdélníků o délce stran $f(\xi_i)$ a Δx_i. Budeme-li dále zjemňovat dělení intervalu $\langle a; b\rangle$ (tj. zvětšovat bez omezení počet dělících bodů x_i, a tedy i částečných intervalů Δx_i, $n \to \infty$) a vytvoříme-li nekonečnou posloupnost integrálních součtů (7.37), pak *určitý Riemannův integrál* spojité funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a; b\rangle$ definujeme jako limitu posloupnosti těchto integrálních součtů

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{7.38}$$

kde a je *dolní mez* a b je *horní mez* určitého integrálu. Platí, že každá ohraničená funkce po částech spojitá (s konečným počtem bodů nespojitosti) na $\langle a; b\rangle$ je na tomto intervalu integrovatelná.



Obr. 7.1: K definici určitého integrálu – výpočet obsahu pomocí proužků.

Newtonův–Liebnitzův vzorec pro výpočet určitého integrálu

Je-li $F(x)$ libovolnou primitivní funkcí k funkci $f(x)$ spojité na $\langle a; b\rangle$, potom platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a). \tag{7.39}$$

Základní vlastnosti určitého integrálu

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, je-li $a < c < b$

4. $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, kde k je konstanta

5. $\displaystyle\int_a^b \big[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)\big]\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$

6. $\displaystyle\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je střední hodnota funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a; b\rangle$

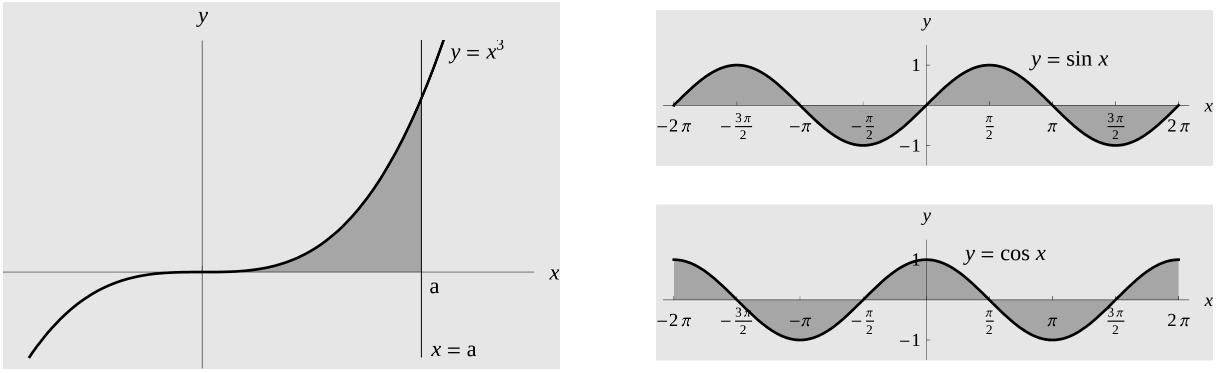
7. Při výpočtu můžeme s výhodou využít také speciálních vlastností integrované funkce, je-li:

   a) $f(x)$ lichá pro $-a \le x \le a$, pak $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

   b) $f(x)$ sudá pro $-a \le x \le a$, pak $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$

   c) $f(x)$ periodická s periodou p, $f(x+p) = f(x)$ pro všechna reálná x, $k \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$, pak

$$\int_a^{a+k\cdot p} f(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x = k\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x$$



Obr. 7.2: K příkladům 7.7.1. – 7.7.4.

7.7.1. Podle definice určitého integrálu (7.38) vypočtěte obsah rovinného obrazce, který je ohraničen křivkou $y = x^3$ a přímkami o rovnicích $y = 0$, $x = a$, kde $a > 0$ (viz obr. 7.2).

Řešení: Rozdělíme interval $\langle 0; a\rangle$ na n stejných intervalů, délka každého částečného intervalu tedy bude

$$\Delta x = \frac{a}{n}$$

a dělící body budou

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{a}{n}, \quad x_2 = 2\frac{a}{n}, \quad \cdots, \quad x_{n-1} = (n-1)\frac{a}{n}, \quad x_n = a.$$

Určíme funkční hodnoty v těchto bodech:

$$y_0 = 0, \quad y_1 = \left(\frac{a}{n}\right)^3, \quad y_2 = 8\left(\frac{a}{n}\right)^3, \quad \cdots, \quad y_{n-1} = (n-1)^3\left(\frac{a}{n}\right)^3, \quad y_n = a^3.$$

Dostali jsme tak sadu obdélníkových proužků, jejichž celkový obsah představuje hrubý odhad obsahu hledaného obrazce, který lze zpřesnit, budeme-li dělení intervalu $\langle 0; a\rangle$ dále zjemňovat. Pro $n \to \infty$ platí, že hledaný obsah P rovinného obrazce vypočteme jako limitu posloupnosti integrálních součtů (viz definice určitého integrálu 7.38)

$$P = \lim_{n\to\infty} s_n, \qquad \text{kde} \qquad \begin{aligned} s_n &= y_1\Delta x + y_2\Delta x + \cdots + y_n\Delta x = \Delta x(y_1 + \cdots + y_n) \\ &= \frac{a}{n}\frac{a^3}{n^3}\left(1 + 2^3 + \cdots + n^3\right) = \frac{a}{n}\frac{a^3}{n^3}\left(\frac{n(n+2)}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

a tedy

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{a^4}{n^4}\frac{n^4 + 4n^3 + 4n^2}{4} = \frac{a^4}{4}.$$

Ke stejnému výsledku dojdeme mnohem rychleji, použijeme-li Newtonův–Liebnitzův vzorec (7.39) pro výpočet určitého integrálu:

$$P = \lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^a x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{a^4}{4} - 0 = \frac{a^4}{4}.$$

7.7.2. Vypočtěte $\displaystyle\int_0^{6\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Integrál vypočteme buď podle Newtonovy–Liebnitzovy formule (7.39):

$$\int_0^{6\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = -\big[\cos x\big]_0^{6\pi} = -(\cos 6\pi - \cos 0) - (1-1) = 0,$$

nebo využitím toho, že $y = \sin x$ je funkce periodická s periodou 2π, pak podle pravidla (7c) dostaneme:

$$\int_0^{6\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = \int_0^{3\cdot 2\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = 3\int_0^{2\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = 3\cdot 0 = 0,$$

neboť integrál funkce $y = \sin x$ přes periodu 2π je vždy roven nule (viz obr. 7.2).

7.7.3. Vypočtěte $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Integrand $y = \sin x$ je lichá funkce, použitím pravidla (7a) snadno určíme, že

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = 0.$$

7.7.4. Vypočtěte $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x$.

Řešení: Funkce $y = \cos x$ je sudá, podle pravidla (7b) dostaneme (viz obr. 7.2):

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x \,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x = 2\big[\sin x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 2(1-0) = 2.\end{aligned}$$

7.7.5. Podle Newtonovy–Liebnitzovy formule (7.39) určete $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{(5x+11)^5}$.

Řešení: Funkce je definovaná pro $x \in \left(-\infty; -\frac{11}{5}\right) \cup \left(-\frac{11}{5}; \infty\right)$, na tomto intervalu je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(5x+11)^5} = -\frac{1}{20(5x+11)^4} + \mathrm{C}$$

a $\langle -2; -1\rangle \subset \left(-\frac{11}{5}; \infty\right)$, podle (7.39) tedy dostáváme:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{(5x+11)^5} = -\frac{1}{20}\left[\frac{1}{(5x+11)^4}\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{20}\left(1 - \frac{1}{6^4}\right) = \frac{259}{5184} \doteq 0.049961$$

7.7.6. Podle Newtonovy–Leibnitzovy formule (7.39) vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^3 \,\mathrm{d}x$ $[0]$

b) $\displaystyle\int_{1}^{4} (3x - 11) \,\mathrm{d}x$ $\left[-\dfrac{21}{2}\right]$

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} (x^2 - 3x + 2) \,\mathrm{d}x$ $\left[-\dfrac{1}{6}\right]$

d) $\displaystyle\int_{-4}^{-2} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$ $\left[\ln\dfrac{1}{2}\right]$

e) $\displaystyle\int_{0}^{3} \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt{3x}\right) \mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{9}{4}\sqrt[3]{3} + 6\right]$

f) $\displaystyle\int_{0}^{1} (\mathrm{e}^x + 1)^3 \,\mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x$ $[91.96]$

7.7.7. a) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$ $[2]$

b) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$ $[0]$

c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos x \,\mathrm{d}x$ $[0]$

d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x$ $\left[2 - \dfrac{\pi}{4}\right]$

e) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos^2 \frac{x}{2} \,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$

f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2}$ $\left[\dfrac{\pi}{4}\right]$

Řešení určitého integrálu substituční metodou

a) Substituční metoda I

Je-li funkce $f(x) = \varphi'(x)\, g\,[\varphi(x)]$ integrovatelná na $\langle a; b\rangle$ a funkce $u = \varphi(x)$ spojitá a ryze monotónní na intervalu $\langle a; b\rangle$, pak platí

$$\int_{a}^{b} f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} \varphi'(x)\, g\,[\varphi(x)] \,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u) \,\mathrm{d}u. \tag{7.40}$$

Jsou-li meze integrálu z funkce $f(x)$ a a b, pak budou meze integrálu z funkce $g(u)$ určeny substituční rovnicí $u = \varphi(x)$, tj. $u(a) = \varphi(a)$, $u(b) = \varphi(b)$. Srovnejte s (7.9) v kapitole 7.2.

b) Substituční metoda II

Je-li funkce $x = \psi(z)$ spojitá a ryze monotónní na intervalu $\langle z(a); z(b)\rangle$, potom platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{z(a)}^{z(b)} f\left[\psi(z)\right]\psi'(z)\,\mathrm{d}z = \int_{z(a)}^{z(b)} g(z)\,\mathrm{d}z, \tag{7.41}$$

kde $z(a) = \psi^{-1}(a)$, $z(b) = \psi^{-1}(b)$. Srovnejte s (7.10) v kapitole 7.2.

7.7.8. Vypočtěte $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Zvolíme substituci $u = \ln x$ (nebo $u = 1+\ln x$), při výpočtu nesmíme zapomenout na změnu mezí určitého integrálu:

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{aligned} u &= \ln x \\ \mathrm{d}u &= \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ u_1 &= \ln 1 = 0 \\ u_2 &= \ln \mathrm{e} = 1 \end{aligned} \right| = \int_0^1 (1+u)\,\mathrm{d}u = \left[u + \frac{u^2}{2}\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} - 0 = \frac{3}{2}\,.$$

7.7.9. Vypočtěte $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Integrand nejprve upravíme a zvolíme substituci $u = \cos x$, při výpočtu použijeme pravidlo (2) o výměně mezí určitého integrálu, při které se jeho hodnota změní na opačnou:

$$\int_0^{\pi} \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin x\left(1-\cos^2 x\right)\mathrm{d}x = \left| \begin{aligned} u &= \cos x \\ \mathrm{d}u &= -\sin x\,\mathrm{d}x \\ u_1 &= \cos 0 = 1 \\ u_2 &= \cos\pi = -1 \end{aligned} \right| = -\int_1^{-1} \left(1-u^2\right)\mathrm{d}u$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(1-u^2\right)\mathrm{d}u = \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\,.$$

7.7.10. Vhodnou substitucí vypočtěte:

a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$ $\left[\sqrt{3} - \dfrac{1}{3}\right]$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{1}{3}\right]$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, \mathrm{d}x$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} \, \mathrm{d}x$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

e) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{\mathrm{e}^x - 1} \, \mathrm{d}x$ $\left[2 - \frac{\pi}{2}\right]$

f) $\displaystyle\int_0^{4} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sqrt{2x + 1}}$ $\left[2 + \ln \frac{1}{2}\right]$

Řešení určitého integrálu metodou per partes

Je-li funkce $f(x) = u(x) \cdot v'(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a; b\rangle$, pak je integrovatelná i funkce $u'(x) \cdot v(x)$ na $\langle a; b\rangle$ a platí

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) \, \mathrm{d}x = \Big[u(x) \cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) \, \mathrm{d}x. \tag{7.42}$$

Srovnejte se vztahem (7.11) v kapitole 7.3.

7.7.11. Vypočtěte $\displaystyle\int_0^1 x \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$.

Řešení: Užitím vztahu (7.42) dostaneme:

$$\int_0^1 x \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u \ = x & v' \ = \mathrm{e}^{-x} \\ u' \ = 1 & v \ = -\mathrm{e}^{-x} \end{array} \right| = \Big[x\,(-\mathrm{e})^{-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 (-\mathrm{e})^{-x} \, \mathrm{d}x$$
$$= \Big[x\,(-\mathrm{e})^{-x}\Big]_0^1 + \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 = -\frac{1}{\mathrm{e}} - 0 + \left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right) + 1 = -\frac{2}{\mathrm{e}} + 1.$$

7.7.12. Metodou per partes řešte určité integrály:

a) $\displaystyle\int_0^1 x \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$ [1]

b) $\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}-1} \ln(x + 1) \, \mathrm{d}x$ [1]

c) $\displaystyle\int_1^2 (2x + 3) \ln x \, \mathrm{d}x$ $\left[10 \ln 2 - \frac{9}{2}\right]$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, \mathrm{d}x$ [1]

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x \,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{\pi}{2}-1\right]$

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{\pi}{4}\right]$

g) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x \,\mathrm{d}x$ $\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$

h) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \arccos x \,\mathrm{d}x$ $[\pi]$

7.8 Geometrické aplikace určitého integrálu

Obsah rovinného obrazce

Jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ spojité nezáporné funkce na intervalu $\langle a;b\rangle$ a platí-li $g(x)\le f(x)$ pro všechna $x\in\langle a;b\rangle$, pak obsah obrazce omezeného grafy funkcí $f(x)$ a $g(x)$ a přímkami $x=a$ a $x=b$ je

$$P=\int_a^b \big[f(x)-g(x)\big]\mathrm{d}x. \tag{7.43}$$

Je-li funkce zadaná parametricky, tj. $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$, kde t je parametr, pak se pro výpočet obsahu rovinného obrazce použije vztah

$$P=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \big[\phi(t)\dot\psi(t)-\psi(t)\dot\phi(t)\big]\mathrm{d}t. \tag{7.44}$$

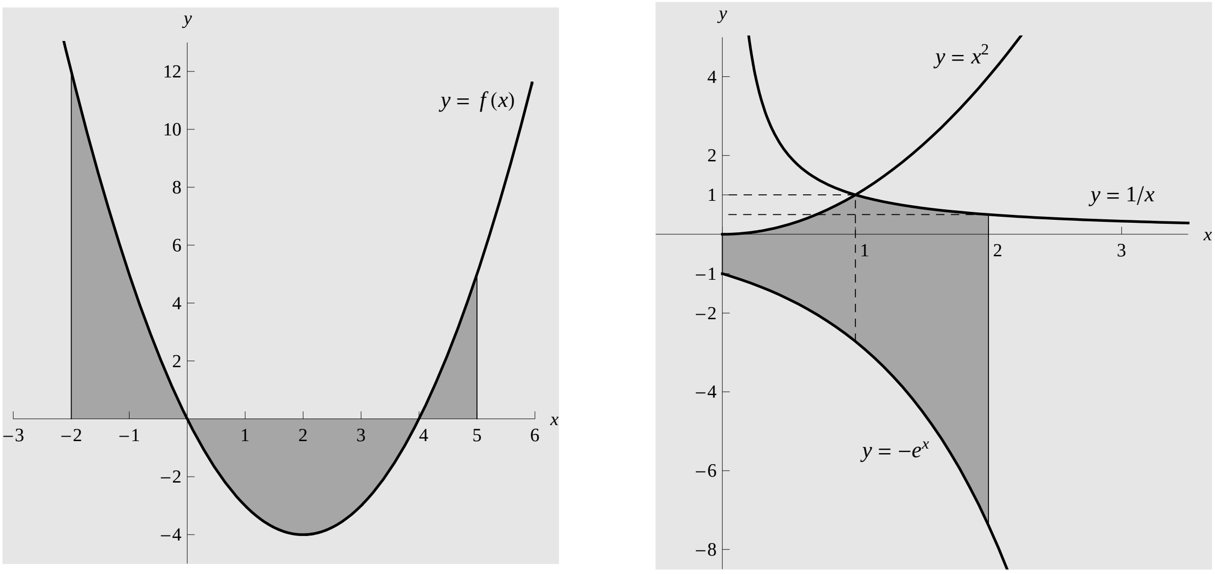
7.8.1. Určete obsah rovinného obrazce omezeného osou x, svislými přímkami $x=-2$ a $x=5$ a grafem funkce $y=f(x)=(x-2)^2-4$.

Řešení: Obrazec je znázorněn na obr. 7.3. Protože jsou funkční hodnoty funkce $f(x)$ na podintervalu $(0;4)$ záporné, budou odpovídající „proužky“ v integrálních součtech přispívat rovněž zápornými hodnotami. Obsah obrazce je však vždy kladný, proto je třeba jej počítat takto:

$$\begin{aligned}P&=\int_{-2}^0[(x-2)^2-4]\,\mathrm{d}x+\left|\int_0^4[(x-2)^2-4]\right|\mathrm{d}x+\int_4^5\big[(x-2)^2-4\big]\,\mathrm{d}x\\&=\int_{-2}^0(x^2-4x)\,\mathrm{d}x+\left|\int_0^4(x^2-4x)\,\mathrm{d}x\right|+\int_4^5(x^2-4x)\,\mathrm{d}x\\&=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_{-2}^0+\left|\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_0^4\right|+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_4^5=\frac{32}{3}+\frac{32}{3}+\frac{7}{3}=\frac{71}{3}\,.\end{aligned}$$

Kdybychom počítali jen integrál v mezích $a=-2$, $b=5$, dostali bychom

$$\int_{-2}^5[(x-2)^2-4]\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_{-2}^5=-\frac{25}{3}-\left(-\frac{32}{3}\right)=\frac{7}{3}\,.$$



Obr. 7.3: K příkladům 7.8.1. a 7.8.2.

Obecný výraz pro obsah obrazce může být zapsán i zjednodušeně ve tvaru

$$P = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{5} \left|(x-2)^2 - 4\right|\mathrm{d}x,$$

při vlastním výpočtu se však tak jako tak nevyhneme rozdělení integračního oboru na podintervaly, v nichž funkce nemění znaménko.

7.8.2. Určete obsah obrazce, který je omezen grafy funkcí $y = f(x) = x^2$, $y = g(x) = \dfrac{1}{x}$, $y = -\mathrm{e}^x$ a přímkami $x = 0$ a $x = 2$ (viz obr. 7.3).

Řešení: Při výpočtu využijeme jednu ze základních vlastností určitého integrálu, a to jeho *aditivitu*:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{je-li } \ a < c < b,$$

a dále vztah (7.43), dostaneme:

$$P = P_1 + P_2 = \int_0^1 \left[x^2 - (-\mathrm{e}^x)\right]\mathrm{d}x + \int_1^2 \left[\frac{1}{x} - (-\mathrm{e}^x)\right]\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \mathrm{e}^x\right]_0^1 + \left[\ln x + \mathrm{e}^x\right]_1^2 = \frac{1}{3} + \mathrm{e} - 1 + \ln 2 + \mathrm{e}^2 - \mathrm{e} = \mathrm{e}^2 + \ln 2 - \frac{2}{3}\,.$$

7.8.3. Určete obsah obrazce, který je ohraničen osou x a cykloidou, která je dána parametricky rovnicí

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t), \quad t \in \langle 0; 2\pi\rangle, \qquad a > 0.$$

Řešení: Vyjdeme ze vztahu (7.44). Koncové body oblouku cykloidy (obdržíme je pro $t = 0$, $t = 2\pi$) leží na ose x, proto:

$$P = \int\limits_0^{2\pi} a\,(1-\cos t)\, a\,(1-\cos t)\,\mathrm{d}t = a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t$$

$$= a^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)\mathrm{d}t = a^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}t = 3\pi a^2.$$

Také můžeme použít přímo vztah (7.43), kde $\mathrm{d}x = a\,(1-\cos t)\,\mathrm{d}t$, pak:

$$P = \int\limits_0^{2\pi a} y\,\mathrm{d}x = a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t.$$

7.8.4. Pro $x \in \langle 0; \pi\rangle$ vypočtěte obsah plochy pod grafem funkce:

a) $y = \sin^2 x$ $[\pi/2]$

b) $y = \sin x$ $[2]$

7.8.5. Vypočítejte obsah rovinného obrazce, který je ohraničen zadanými křivkami:

a) $y = x^3,\ x = 2,\ y = 0$ $[4]$

b) $y = x^2 - 2x,\ y = x$ $[4.5]$

c) $y = x^2 - 3x + 2,\ y = 0$ $[1/6]$

d) $y = x^2,\ x = y^2$ $[1/3]$

e) $y = x,\ y = x + \sin^2 x,\ x = 0,\ x = \pi$ $[\pi/2]$

7.8.6. Vypočtěte pomocí integrálu obsah kruhu o poloměru r:

$x = r\cos t$

$y = r\sin t, \quad t \in \langle 0; 2\pi\rangle$ $\left[\pi r^2\right]$

7.8.7. Určete obsah obrazce ohraničeného křivkami:

a) $x = a\cos^3 t$

$y = a\sin^3 t \quad (a > 0)$ $\left[3\pi a^2/8\right]$

b) $x = a\cos t$

$y = b\sin t \quad (a > 0,\ b > 0)$ $[\pi ab]$

Objem rotačního tělesa

Objem rotačního tělesa, které je omezeno plochou vzniklou rotací grafu funkce $f(x)$ spojité na intervalu $\langle a; b\rangle$

a) kolem osy x:

$$\boxed{V = \pi \int\limits_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right]\mathrm{d}x, \qquad (7.45)}$$

b) kolem osy y:

$$V = 2\pi \int\limits_a^b x\big[f(x) - g(x)\big]\,\mathrm{d}x. \tag{7.46}$$

Je-li funkce zadaná parametricky, platí

$$V = \pi \int\limits_\alpha^\beta \psi^2(t)\dot{\phi}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{7.47}$$

7.8.8. Vypočtěte objem koule o poloměru R.

Řešení: Koule vzniká rotací půlkruhu se středem v počátku a poloměrem R, je tedy omezena povrchem, který vzniká rotací grafu funkce

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

kolem osy x. Její objem podle vztahu (7.45) tedy je:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int\limits_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi \left[R^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-R}^{R} \\ &= \pi \left(R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) - \pi \left(-R^3 + \frac{1}{3}R^3\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \,. \end{aligned}$$

7.8.9. Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného křivkami:

a) $y = \sin x,\ y = 0,\ x = \pi$
– kolem osy x $\big[\pi^2/2\big]$
– kolem osy y $\big[2\pi^2\big]$

b) $y = \cos x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2}$
– kolem osy x $\big[\pi^2/4\big]$
– kolem osy y $\big[\pi^2 - 2\pi\big]$

c) $y = \sin x,\ y = \dfrac{2x}{\pi}$ kolem osy x $\big[\pi^2/12\big]$

Délka oblouku rovinné křivky

Nechť body $[a; f(a)]$ a $[b; f(b)]$ jsou krajními body oblouku rovinné křivky dané rovnicí $y = f(x)$, délku l tohoto oblouku potom vypočteme ze vztahu

$$l = \int\limits_a^b \mathrm{d}l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x. \tag{7.48}$$

Je-li funkce zadaná parametricky, platí

$$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\left[\dot{\phi}(t)\right]^2 + \left[\dot{\psi}(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t. \tag{7.49}$$

7.8.10. Určete délku křivky $y = \ln(1 + \sin x)$, jejíž krajní body mají x-ové souřadnice: $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$.

Řešení: $y' = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x} \quad \Rightarrow \quad 1 + \left(y'\right)^2 = \dfrac{2}{1 + \sin x} = \dfrac{2}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)},$

$$l = \int_0^\pi \sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} = 2\left[\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{4}\right)\right]_0^\pi$$

$$= 2\left(\ln \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} - \ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right) = 2\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}} = 2\ln \operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{8} = 4\ln \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} \doteq 3.5255.$$

Neboť použitím univerzální goniometrické substituce (viz kapitola 7.5) dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

7.8.11. Vypočtěte délku křivky:

a) $y = \ln x, \quad x \in \langle 1; 10\rangle$ [9.4]

b) $y = \ln \sin x, \quad x \in \left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\rangle$ [ln 3]

c) $x = t$

$y = t - \dfrac{t^2}{3}, \quad t \in \langle 0; 3\rangle$ [3.4]

7.8.12. Určete délku jednoho oblouku cykloidy:

$x = a(t - \sin t)$

$y = a(1 - \cos t), \quad t \in \langle 0; 2\pi\rangle$ [$8a$]

Obsah rotační plochy

Obsah rotační plochy vzniklé rotací grafu funkce $f(x)$ spojité na intervalu $\langle a; b\rangle$

a) kolem osy x:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}l = 2\pi \int_a^b f(x)\,\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x, \tag{7.50}$$

b) kolem osy y:

$$S = 2\pi \int_a^b x\,\mathrm{d}l = 2\pi \int_a^b f(y)\,\sqrt{1 + [f'(y)]^2}\,\mathrm{d}y. \tag{7.51}$$

Je-li funkce zadaná parametricky, pak

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\,\sqrt{\left[\dot{\phi}(t)\right]^2 + \left[\dot{\psi}(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t, \tag{7.52}$$

resp.

$$S = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \phi(t) \sqrt{\left[\dot{\phi}(t)\right]^2 + \left[\dot{\psi}(t)\right]^2}\, \mathrm{d}t. \tag{7.53}$$

7.8.13. Vypočtěte povrch koule o poloměru R.

Řešení: Kulová plocha o poloměru R vzniká například rotací půlkružnice

$$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in \langle -R; R \rangle$$

kolem osy x. Platí:

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,, \quad \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

a podle vzorce (7.50) dostaneme:

$$S = 2\pi \int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, \mathrm{d}x = 2\pi R \int\limits_{-R}^{R} \mathrm{d}x = 4\pi R^2.$$

7.8.14. Vypočítejte obsah plochy, která vznikne rotací křivky:

a) $y = x^3, \quad x \in \langle 0; 2 \rangle$
 – kolem osy x [203.04]
 – kolem osy y [77.32]

b) $y = 4 - x^2, \quad x \in \langle -2; 2 \rangle$ kolem osy x [36.18]

c) $x = a \cos^3 t$
 $y = a \sin^3 t, \quad t \in \left\langle 0; \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$ kolem osy x $\left[\dfrac{6}{5}\pi a^2\right]$